Coll. Rom. Soc. Jesu Cat. Inscr. B.N.

# ORONTII FINÆI DELPHINATIS, Regij Mathematicarũ Lutetiæ Professoris,

## ARITHMETICA

*Practica, in compendiũ per Authorem ipsum redacta, multisq; accessionibus locupletata: Iis qui ad liberam quãuis, nedũ Mathematicã, adspirant philosophiã perutilis, admodũmq; necessaria.*

LVTETIAE PARISIORVM
Apud Simonem Colinæum.
1544.

Virescit vulnere virtus.

B. S.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

VITTORIO EMANUELE BIBLIOTECA IN ROMA

## Authoris Octostichon, ad Lectorem.

*Cùm natura sagax numero, mensúq; crearit*
*Singula, ponderibus clauserit inde suis:*
*Disce(precor)numeros primis tractare sub annis,*
*Si Mathesin recta poscis adire via:*
*Si cupis & rerum proprias discernere causas,*
*Artibus humanis vel dare subsidium.*
*Hoc velis à brutis saltem differre, quod inter*
*Viuentes possis vel numerare. Vale.*

¶Indicem capitum horum librorum Arithmeticæ practicæ, reperies ad calcem voluminis.

# AD REVERENDVM ET simul eruditum Patrem, Do. Antonium Leufredũ, Vrſicampi Abbatẽ digniſſimũ: Orontij Finęi Delphinatis, in ſequentes Arithmeticæ libros, PRAEFATIO.

INTER EA QVAE IN RERVM *uniuerſa natura (Pater obſeruandiſſime) non poſſunt abſque materia ſubſiſtere, & nihilominus extra materiam facilè ſunt intelligibilia: maximè eſt ipſa unitas, & qui ex eadem unitate procreatur numerus. Quoniam numerus tam per ſeſe, quàm in rebus materialibus indifferenter conſyderatur. Cuius ſimplex & abſoluta uidetur eſſe cõtemplatio, cùm naturales & ueræ ipſius numeri diſquirũtur proprietates: an uidelicet ſit par aut impar, primus uel cõpoſitus, perfectus itẽ, uel abũdans, aut diminutus, & quæ ſunt eiuſmodi. In materia porrò conſyderari dicitur numerus, cùm artificioſa operandi ratione, humanis inſeruit negotiationibus. Hinc duæ ſubortæ ſunt Arithmeticæ partes: theorica ſcilicet, quæ proprias numerorũ paſſiones & uirtutes, & accidẽtia perſcrutatur: & practica, quæ materiales (ut ſic loquar) reſpicit numerorũ applicationes. Theorica itaq; dignitatẽ, & quæ numeris ineſt ueritatẽ oſtẽdit: practica uerò uſum, ac utilitatẽ eorundẽ numerorũ explicare uidetur. Et proinde facilè colligitur, Arithmeticã inter liberales diſciplinas quæ Mathematicæ uocãtur, primum ſibi uẽdicare locũ: ſiue ipſius artis diuinã ſimplicitatẽ, ſiue utilitatũ illius inſpicias amplitudinẽ. Nulla ſiquidẽ ars tam pura & utilis, tam etiã frequens & neceſſaria*

Arithmetica duplex.

Arithmeticę dignitas & vtilitas.



BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

est,uel quæ alijs minùs subdita sit artibus:quãtũ Arithmetica.De qua libros quatuor dudũ cõscripsimus,& sæpius auctos & emẽdatos,in cõmunẽ studiosorũ gratiã ædidimus.Quos nõ parũ gratos ac utiles(ut optabamus) hactenus fuisse,uel ob id maximè suspicamur:ꝙ portatili magis uolumine cõpressos, ab innumeris desyderari sæpius acceperimus.Quapropter,ut nullã officij nostri partem omitteremus:ipsã Arithmeticã nostrã denuò castigauimus, & q̃ plurimis illustrauimus accessionibus,multis tũ in melius cõmutatis,tũ in cõpendiosam artis rationẽ (sine iactura tamẽ) redactis:& in Enchiridij formã tandem ædidimus.Quæcũq; igitur ad meliorẽ tum integrorũ, tũ fractorũ numerorũ praxin expedire iudicauimus, ea pura & admodũ facili traditione pstrinximus:omissis regularũ,uulgariumq; negotiationũ inexplicabilibus labyrinthis.utpote,q Mathematicis,hoc est,purioris philosophiæ discipulis,uiã ad maiora potissimùm desyderamus aperire. Hũc porrò laborẽ nostrũ & industriã,tibi cõsecrare nõ erubuimus. q præter græcarũ & hebræarum literarũ cognitionẽ (quam sexagenarius,& supra, perdiscere nõ erubuisti)Mathematicis sic imbutus es disciplinis,ut possis de illis nõ infæliciter iudicare.Adde,ꝙ tua humanitate & clemẽtia,me sæpius recipere, & fouere dignatus es:& innumeris beneficijs,aduersis maximè tẽporibus(qbus uerus dignoscitur amicus)me tibi ppetuò deuinctũ reddidisti.Vnde sæpius desyderaui hãc tuã erga me liberalitatẽ,aliquo saltẽ recognoscere munusculo.Quod ab ipsis non impertinẽter incepimus numeris.sicut enim à numeris,ad grauiora fit progressus: sic huic exiguo munusculo,digniora tuo nomine(Deo fauente)succedent.Vale omnibus numeris absolute Pater, Lutetiæ Parisiorũ,mense Nouẽbri 1544.

Anno scilicet 1532. 1535. 1542.

Quę in hac continẽtur. Arithmetica.

Argumẽtũ dedicatiõis hui⁹ Arith.

# ORONTII FINAEI Delphinatis, Regij Mathematicarũ Lutetiæ professoris, Arithmeticæ practicæ Liber primus: In quo de integris, hoc est, eiusdem speciei vel denominationis tractatur numeris.

*De numero, elementis, limitibus, & arte numerandi.* *Caput 1.*

1 NVMERVS EST, VNItatum inuicem compositarũ multitudo, vt duo, tria, quatuor, quinq́ꝫ, decem, viginti, &c. vnde & numerus numerans, seu mathematicus appellatur. Vnitas verò est, qua vnaquæq́ꝫ res corporea vel incorporea dicitur vna: vt vnus angelus, vnus homo, vnus lapis, vnus dies, ab vnitate dicitur vnus. Plures autem angeli, vel homines, aut lapides, siue dies multitudinem efficiunt, quæ numerus numeratus, seu phisicus dicitur. Vnitas igitur, nõ est numerus, sed principium & origo numeri: vtpote, quæ per sese multiplicata vel diuisa, in

Numerus quid.

Vnitas.

Vnitatis proprietates.

ſeipſam abſque cremento reſoluitur. Eſt inſu-
per vnitas cuiuſlibet numeri pars quota,ab ip
ſo numero denominata.Naturalis porrò ſeries
numerorum eſt,quę à binario continuum vni-
tatis obſeruat incremẽtum. Quanuis igitur in
numerorum reſolutione deueniatur ad mini-
mum: nunquã tamen in numerorum augmen-
tatione ad maximum licet peruenire numerũ.

Naturalis ordo numerorum.

¶Numerorum autem(quantum ad ſuſceptum 2
videtur ſpectare negotium)alius digitus,alius
articulus, alius demum cõpoſitus nominatur.
Digitus eſt,qui inter vnitatẽ & denarium con
tinetur numerum,& nouem non excedit vni-
tates:vt duo,tria,quatuor,quinque,ſex,ſeptẽ,
octo,nouem.Articulus verò dicitur numerus,
qui ex decem vnitatibus,vel binarijs,aut ter-
narijs , aliiſve decuplatis conſurgit numeris:
cuiuſmodi ſunt decem, viginti, triginta,qua-
draginta,quinquaginta,cẽtum,mille, & ſimi-
les numeri in naturali ſerie articulatim diſtri-
buti. Compoſitus demũ ſiue mixtus appella-
tur numerus,qui inter duos quoſuis proximos
articulos cõprehenditur,& ex priore articulo
& aliquo digitorum reſultat : veluti quinde-
cim,viginti ſex,triginta ſeptem,quinquagin-
ta octo,centum & ſexaginta nouem,&c.

Nu.digit⁹. Numerus articulus. Nu.compoſitus.

¶In numerorum porrò expreſſione , duo ve- 3
niunt potiſſimè conſideranda:figurę videlicet
arithmeticæ,quæ vocantur elementa,& ipſo-
rum elementorum loca ſiue limites.Elementa
ſunt decem,nouem quidem ſignificatiua,quæ

Elementa numeralia.

in hunc modum figurãtur ab Arithmeticis,& talem habent qualem ſubſcripſimus valorem.

| vnũ. | duo. | tria. | quatuor. | qnq̧. | ſex. | ſeptẽ. | octo. | nouẽ. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. |

Et vnum non ſignificatiuum, ad ſolam occupationem limitum,& ſignificatiuorum elementorum tranſpoſitionẽ excogitatum: quod tziphra propriè dicitur,& in hunc modum figuratur. o.

4 ¶Limites autem elementorum, ſunt illorum ſedes,à dextra verſus lęuam in infinitum progredientes, & decupla ratione ſiue poteſtate ſeſe inuicẽ cõtinuè ſuperãtes. In quolibet igitur numero tot occupãtur limites, quot in eo ſunt elementa. Vnumquodque propterea elementorum ſignificatiuorum, in primo limite ſuas ſimpliciter repreſentat vnitates,in ſecundo decies, in tertio centies, in quarto milleſies, in quinto decies milleſies: & ſic conſequenter,denæ centenæ millenę quantumlibet iterata nomenclatura. Exempli gratia, binarius in primo limite duo tãtùm præfigurat,in ſecundo duas denas,hoc eſt, viginti,in tertio bis centum, in quarto bis mille, in quinto vigeſies ſeu bis decies mille:& ſic conſequẽter. Idem reſpondenter intelligito,de cæteris elementis ſignificatiuis.Contrahit itaq; numerus ab ipſis elementis ſignificatiuis,vnitatũ multitudinem:ab ipſis verò limitibus, eorundem elemẽtorum denariam, centenariam,aut millenariam,pro dati numeri multitudine iteratã

Elementorum limites in numeris.

Elementorũ & limitũ officiũ.

nomenclaturam. Quasi elementa ipsa sint numeratores, limites verò denominatores, earũ quæ in dato numero sunt vnitatum. Velut ex subscripta potes elicere figura.

| | Millenæ millenæ millenarum. | Centenæ millenæ millenarum. | Denæ millenæ millenarum. | Millenæ millenarum. | Centenæ millenarum. | Denæ millenarum. | Millelenæ. | Centenæ. | Denæ vnitatum. | Vnitates. | Limitũ siue locorũ denominationes. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sinistra pars infinita. | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | Nouenarius. | Digitorum nomenclaturæ. Pars dextra, pricipiũ nũerorũ. |
| | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | Octonarius. | |
| | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | Septenarius. | |
| | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | Senarius. | |
| | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | Quinarius. | |
| | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | Quaternarius. | |
| | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | Ternarius. | |
| | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | Binarius. | |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | Vnitas. | |
| | o | o | o | o | o | o | o | o | o | o | tziphra. | |
| | Decimus. | Nonus. | Octauus. | Septimus. | Sextus. | Quintus. | Quartus. | Tertius. | Secundus. | Primus limes. | Ordo limitum, siue locorum. | |

De numeratione.

NVMERARE IGITVR, EST DATVM quemuis numerum, per propria & loca & elementa decẽter repræsentare: vt quãtus sit ipse numerus, facilè valeamus exprimere. Quibus autem elementis & limitibus, id absoluendum fuerit: ipse propositus te docebit numerus. Vbicũq; enim fuerint duæ numeri dictiones, quarum prima aduerbialiter, altera verò

Numerationis artificiũ notandũ.

nominaliter exprimitur: prima docet quo ele-
mento, ſecunda verò quo limite datus expri-
mendus ſit numerus. Vt pote, ſi volueris arith-
meticè repreſentare bis mille nonies centum
viginti quatuor: dictio bis denotat binarium
elementum, mille autem illud eſſe locandum
in quarto limite qui eſt millenarũ: dictio quo-
que nonies elementum nouenarium, centum
autem denotat illud ponendum eſſe in tertio
limite qui eſt centenarum: porrò viginti cùm
duas denas ſignificent, per binarium in loco
denarum, vtpote ſecundo limite: quatuor au-
tem vnitates, per quaternariũ in primo limite
poſitum exprimentur elemẽtum. vt vides hic
2 9 2 4. Hinc patet expreſſionem numeri, à
limitibus potentia maioribus ad ſubtiliores,
hoc eſt, à ſiniſtra verſus dextram eſſe pronun-
tiandam. Vt ſi hunc velles exprimere nume-
rum, 8 5 3 4: nominabis in primis 8 & ſuum
limitem, poſtea 5 & ſuum limitẽ, & ſic de cæ-
teris. Dices igitur ipſum numerũ 8 5 3 4, con
tinere octies mille, quinquies cẽtum, triginta
quatuor. Si datus itaque numerus fuerit digi-
tus, proprio deſignabitur elemento: Si articu-
lus aut cõpoſitus fuerit, duobus ad minus ex-
primetur elemẽtis. Sed articulus, in primo li-
mite ſemper habebit tziphram, vt 20, 50, 100:
compóſitus verò, elementum aliquod ſignifi-
catiuum, vt 12, 15, 26, 138. Vides igitur, q̃
pulchrè ipſa decem elementa, vnà cum ipſo-
rum limitum continuè decuplata ratione, ad

Numeri qualiter exprimẽdi.

Recollectio notanda.

omnium quorūcunq; numerorū repræsentatio-
nem sint satis. Item, qualiter expressio nume-
rorum, à limitibus potentià grossioribus com-
modiùs absoluatur, q̄ è diuerso. Hinc factum
est, vt illa continuè decuplata limitum pote-
stas, à dextra versus læuam necessariò distri-
buenda fuerit: vt singulæ videlicet vnitatum
denæ ex quolibet insurgentes limite, per solā
vnitatē in proximo versus dextram limite re-
præsentētur. Sed hæc de numeratione, & eius
artificio sint satis.

## De integrorum numerorum additione, Cap. 2.

ADDERE IN INTEGRIS I est, duos aut plures integrorū nu-
meros in vnum componere nume
rum: vt summarius inde resultans
numerus dignoscatur. Absoluitur
autem ipsa integrorū additio, in hunc qui se-
quitur modum. Subscribantur inuicem propo-
siti & addendi eorundē integrorum numeri,
pro singulorum & limitum & elementorū or-
dine: sic vt vnitates vnitatibus, denæ denis,
centenæ centenis, & reliqua reliquis directè
respondeant. Sub quibus transuersalis quædā
subscribatur lineola, quæ summarium ab ipsis
addendis separet numerum. His præparatis,
congregētur in primis vnitates: & si resultans
inde numerus fuerit digitus, is sub vnitatibus
& interposita lineola proprio signetur elemē-
to: Si autem collectus ipse numerus fuerit

Additionis integrorū Regula.

articulus,illũ reſeruabis,& ſubſcribes tziphrã o: At ſi præfatus numerus fuerit ex digito & articulo compoſitus,obſeruetur rurſum articulus, & ſubnotetur digitus. Poſtmodum colligantur denæ,& inde reſultãti numero tot addãtur vnitates , quot fuerint denæ in retento nuper articulo : & conſurgens inde numerus rurſum conſideretur,an fuerit digitus,articulus,aut cõpoſitus. Si fuerit digitus,is ſub denis proprio exprimatur elemento:Si articulus, is reſeruetur, & ſubſcribatur tziphra o: Si autem ex digito & articulo cõpoſitus extiterit, ſubnotetur digitus, & reſeruetur iterũ articulus.Deinde congregentur millenæ:idémq; diſcurſus, ac elementorum ſubnotatio priori ſimilis obſeruetur,ex centenis ad millenas,atq; reliquos progrediendo limites,donec ad vltimum peruentum fuerit ipſorum numerorum ordinem.

2 ¶Memineris tamen,cùm ad vltimã perueneris additionẽ, ipſum articulum (ſi retentum forſitan habueris) in proximum limitem læuorſum eſſe transferendum, & illic per congruum ſubnotandum elementum, tot repreſentans vnitates, quot denas habuerit idẽ articulus. Item, quoties in primo,aut aliquo intermediorum limitum ordine,tziphræ abſq; ſignificatiuo concurrerint elemento (cùm nihil ex illarum additione conſurgat) ſubnotabis tziphram,quæ illum ſaltem deſignet limitem : ni forſitan habueris articulum ex proxima collectione reſeruatum , qui loco tziphræ

Documenta particularia in additione ſeruanda.

tunc ſubnotandus erit. Facilitabit etiam plurimùm additionẽ, ſi maiores numeros minoribus in primis ſubſcripſeris: & priùs maiora, quàm minora inuicem compoſueris elementa.

Vnde pendeat additionis artificium.

Pendet igitur totum additionis artificium, ex ipſa limitum decuplata poteſtate. vt enim limes quilibet (excepto primo) decuplus eſt limitis dextrorſum immediatè præcedentis: ſic pro ſingulis cuiuſlibet limitum denis, vnitas in proximè ſuccedẽtem verſus læuam reponitur ordinem.

Additionis exempla.

¶ In faciliorem eorũ quæ diximus intelligentiã, ſubſcriptas additionum contemplare formulas. In quarum prima, hi numeri 2450, 1334, 423, hunc conficiunt numerũ 4207. In ſecunda verò formula, hic numerus 126200, ex iſtorum numerum 95080, 23090, 8030, additione conſurgit. 3

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Numeri addendi. | 2 | 4 | 5 | 0 | | 9 | 5 | 0 | 8 | 0 |
| | 1 | 3 | 3 | 4 | | 2 | 3 | 0 | 9 | 0 |
| Lineola interiecta. | | 4 | 2 | 3 | | | 8 | 0 | 3 | 0 |
| Addẽdorũ ſumma. | 4 | 2 | 0 | 7 | 1 | 2 | 6 | 2 | 0 | 0 |

## ¶ De *ſubtractione eorundem integrorũ*, Cap. 3.

De quibus numeris ĩtelligatur ſubtractio.

SVBTRAHERE AVTEM EST, datum numerum à maiori numero artificialiter auferre: vt reſiduus innoteſcat numerus. Nam æqualem ab æquali demere, ſuperuacaneum eſt: & maiorem à minore, impoſſibile. In ſubtractionis ergo principio, duo tantũ occurrũt 1

numeri : ſubtrahendus videlicet , & is à quo facienda eſt ſubtractio. Vnde ſi plures numeros ab eodem numero , vel pluribus numeris ſubducere fuerit operæpretium: vtrunq; ordinem in vnum priùs coaceruabis numerum.

Notãdum.

¶Subtractio igitur(vt rẽ acu tangamus) contraria eſt additioni:idcirco per contrariam additionis operationem,in hunc modũ facienda eſt. Subſcribatur numerus ſubtrahendus ei numero, à quo ſubducendus eſt,obſeruato limitum ordine,vti proximo dictum eſt capite,& ſub vtroq; protracta lineola, quæ relictum ex ſubtractione diſtingat numerum. Quibus abſolutis, auferantur in primis inferiores vnitates à ſuperioribus vnitatibus , poſtea denæ à denis, deinde centenæ à centenis, & reliqua ſubtrahendi numeri elemẽta à reliquis numeri ſuperioris elementis,quouſque ad vltimum ipſius numeri ſubtrahendi perueneris ordinẽ: ſubnotentúrq; infra lineolam ex ſingulis ſubtractionibus relicti numeri, qui ſemper erunt digiti. Vbi autem nihil ex ſubtractione relinquetur , ſubnotetur o : excepto loco vltimo, quem in vanum occuparet.

Ars ſubtrahendi minorem numerũ à maiori numero.

3 ¶Quoties porrò aliquod elementum ſubtrahẽdi numeri,fuerit maius ſuperiore(quod ſæpius accidit ) aufer ipſum elementum à 10,& reſiduum iunge ipſi elemento ſuperiori,ac inde reſultantem ſubſcribe numerum,qui vnico ſemper exprimetur elemento : vel ipſum immediatè ſubſcribe reſiduum , ſi idem ſupernũ

Documentum,cũ elementa inferiora, ſunt maiora ſuperiorib⁹.

elementum fuerit o. Ratione autem ipſius de-
næ (quæ virtualiter à læuo & proximo numeri
ſuperioris elemēto mutuata eſt) addenda erit
vnitas elemēto ſubtrahendi numeri læuorſum
immediatè ſuccedēti, & reſultans inde nume-
rus à reſpondenti numeri ſuperioris elemēto
conſequenter auferēdus, vel ipſa tantùm vni-
tas, ſi o ſequentem locum occupauerit, aut fue
rit ipſius numeri ſubtrahēdi locus poſtremus.

Subtractionis exēplū. ¶ In exemplum eſto numerus 3 4 6 5 7, à quo 4
hunc oporteat auferre numerum 2 6 5 8 4. In
primis igitur 4 dempta ex 7, relinquūt 3: quæ
ſubnotantur. Deinde 8 ſubducta ex 10, relin-
quunt 2: quæ vnà cū 5, efficiunt 7 ſubſcriben-
da. Iungitur itaque vnitas ſequenti quinnario
ſubtrahendi numeri, fiunt 6. quę detracta à 6,
nihil relinquunt: ideò ſubſcribitur o. Poſtea
tolluntur 6, à 10, relinquuntur 4: quæ vnà cum
ſuperiore quaternario, faciūt 8 ſubſcribenda.
Tandem ſequenti binario iungitur vnitas, fi-
unt 3: quæ dempta à 3, nihil relinquunt, ni-
hil ergo ſubſcribitur, cum limes ſit vltimus.
Concludendum igitur, 2 6 5 8 4 ſubtracta à
3 4 6 5 7, relinquere hunc numerum 8 0 7 3.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Nu. à quo fit ſubtractio | 3 | 4 | 6 | 5 | 7 |
| Numerus ſutrahendus. | 2 | 6 | 5 | 8 | 4 |
| Lineola interpoſita. | | | | | |
| Numerus reſiduus. | | 8 | 0 | 7 | 3 |

In maiorem artis expreſſionem, ſuccedentia examinentur ſubtractionis exempla.

| 3 7 4 8 0 0 | 7 9 0 0 0 0 |
|---|---|
| 8 5 4 7 | 5 0 0 4 7 9 |
| 3 6 6 2 5 3 | 2 8 9 5 2 1 |

## De ipsorum integrorũ multiplicatione, Cap. 4.

1 MVLTIPLICARE EST, DVObus oblatis numeris, ex altero toties sumpto quot sunt vnitates in reliquo, procreatum inuenire numerum. In ipsa ergo multiplicatione, duo proponuntur numeri: multiplicandus scilicet, qui pro vnitatũ alterius multitudine venit iterandus: & multiplicans, qui aliũ metitur numerum, & semper aduerbialiter exprimitur. Quanuis autem duo numeri sese adinuicem multiplicantes, producant numeros inuicem æquales: faciliùs tamẽ maiorẽ numerum per minorem, q̃ è diuerso multiplicamus.

*Multiplicationis diffinitio.*

*Nu. multiplicandus. Multiplicans.*

2 Multiplicantur autẽ numeri, aut digiti per digitum: aut articuli per digitum, vel articulum: aut deniq; compositi per digitum, articulum, aut compositum numerum. Digitorum itaq; multiplicatio, in promptu semper habenda est: si reliquas volueris perficere multiplicationes. Hæc autem digitorũ multiplicatio, tum vsu naturali, tum exercitio acquiritur: vtpote, quæ statim nota, vel admodũ facilis est, potissimum vbi multiplicans 5 vel 6 non excedit vnitates. Quòd si digitus multiplicans 5, vel 6 superauerit vnitates: in hunc modum

*Quot modis fiat multiplicatio.*

*De mutua digitorum multiplicatione.*

Regula vbi multiplicãs digitus maior est 5 vel 6 vnitatib⁹.

alleuiabis multiplicationem. Duc vnius differentiam à denario numero, in differentiam alterius: & productũ ſubſcribe. Deinde, ſubtrahe vnius differentiam ab altero: & relictũ numerum, in denarũ reponito ordinẽ, aut prioribus (ſi adfuerint) denis adiungas. Conſurget enim numerus ex ipſorum digitorũ multiplicatione procreatus. Vt ex ſubſcriptis exemplis, colligere haud difficilè potes.

| 8 ╳ 2<br>7 ╳ 3 | 8 ╳ 2<br>8 ╳ 2. | 9 ╳ 1<br>8 ╳ 2 | 7 ╳ 3<br>6 ╳ 4 |
|---|---|---|---|
| 5 6 | 6 4 | 7 2 | 4 2 |

Notãdum.

Poteris etiã præfatam digitorũ multiplicationem faciliorẽ reddere, vbi alter fuerit par: ſi per illius dimidiũ multiplicaueris reliquũ, & productũ duplaueris numerũ. Vt ſi proponantur 9 per 8 multiplicanda, duces 9 in 4, fient 36: quę bis ſumpta, conficiunt 72. Haud aliter facito de cæteris.

Aliã digitorum multiplicatio p propriã tabellam.

Sed conſulo, cũ laborioſam volueris effugere taliũ digitorũ multiplicationẽ, vt prę oculis habeas obiectam tabellam. In cuius alterutro lateralium

Tabella multiplicationis digitorum numerorum.

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

digitorum ordine, si multiplicandum acceperis digitum, in reliquo verò multiplicantem: offendes ad vtriusque concursum, numerum ex ipsorum digitorũ multiplicatione productũ. Vtpote, si acceperis 8 in vertice, 7 verò in ordine læuo: sese offerẽt ad cõmunem angulum 56, quæ ex ductu 8 in 7 procreantur.

3 ¶His præmissis, docendum est qualiter numerus compositus vel articulus, per ipsum digitũ multiplicetur. Et in primis compositus. Subscribatur ergo digitus multiplicans, sub primo cõpositi & multiplicandi numeri elemẽto siue limite: vnà cum lineola, sub vtroque transuersaliter interiecta. Deinde multiplicentur singula ipsius cõpositi numeri elementa, per ipsum digitum, ab vnitatibus exordiendo: & considerẽtur singulatim producti ex qualibet multiplicatione numeri, an videlicet fuerĩt digiti, articuli, aut ex digito & articulo compositi. Si primum acciderit: subscribantur ipsi digiti, sub lineola transuersali, & proprio limite. Si autẽ fuerint articuli: subscribatur tziphra 0, & seruetur articulus. Si demũ ex digito & articulo, ijdem producti componantur numeri: subscripto digito, reseruetur iterum articulus. Quot autem fuerint denæ, ipsum articulum alterutro duorum modorum reseruatum denominantes: tot adijciantur vnitates proximè sequenti multiplicationi, aut in eodẽ proximè seqnenti reponantur limite, vbi tziphra eundẽ occupauerit limitẽ, vel ad vltimũ

Vt multiplicãdus cõpositus nu. per digitũ.

multiplicãdi numeri peructũ fuerit elemẽtũ. Cùm enim vnusquisq; limes, decuplus sit limitis dextrorsum immediatè precedentis: quotlibet decem vnitates dextri, per solam vnitatem in proximo limite versus læuã (vt in additione) repręsentantur. Multiplicatio nanq;, additio quædam esse videtur: hoc solùm excepto, quoniam in additione inuicem addendi proponuntur numeri, in ipsa autem multiplicatione simul procreantur & adduntur.

De ratione supradictę multiplicationis.

Ex hac itaq; numeri compositi per digitum multiplicatione, omnem (etiam quantumuis difficilem) absoluimus numerorum multiplicationem. Ea autem pendet ex prima secundi elementorum Euclidis. nam digitus multiplicans, est veluti quædam linea indiuisa: compositus autem & multiplicandus numerus, instar lineæ in quotcunq; segmẽta diuisæ, vtpote in vnitates, denas, centenas, millenas, &c. Qui igitur ex ipso digito, & quolibet ordine vel elemento multiplicandi procreantur numeri: æquales sunt ei, qui ex eodem digito & toto multiplicando producitur numero.

Vnde pendeat supra dicta ratio multiplicãdi.

¶ Sit verbi gratia, hic numerus 25038, per 5 multiplicãdus. Dispositis (vt prædiximus) numeris, 8 in primis ducta in 5, faciunt articulũ 40: subscribitur ergo 0, & seruantur 4 articuli denæ. Deinde 3 in 5 ducta, efficiũt 15, quibus adduntur 4 reseruatum denominantia articulum, consurgunt 19: subscribitur itaq; digitus 9, & reseruatur articuli dena. In sequenti ergo

Exemplũ multiplicationis cõpositi numeri per digitũ.

limite,reponitur 1:cùm tziphra 0,ipſum occu pet limitem. Poſtmodum 5 per 5 multiplicata,efficiunt 25: ſubſcribitur ergo digitus 5,& reſeruantur 2 ipſum denominātia articulum. Tandem 2 in 5,faciunt 10, quibus adduntur 2,conſurgunt 12:quæ ſuis elementis & limitibus ſubnotātur,ipſam denam in ſuccedentem traducendo limitem. Reſultabunt ergo ex ipſa multiplicatione, 125190.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 5 | 0 | 3 | 8 |
| | | | | | 5 |
| 1 · | 2 | 5 | 1 | 9 | 0 |

4 ¶Si autem multiplicandus numerus fuerit articulus,cuius primi limites tziphris tantū occupantur : vtcunq; alleuiabitur ipſa multiplicatio. Nam multiplicatis per ipſum digitū reſiduis elemētis articuli numeri(à primo ſignificatiuo exordio ſumpto ) vti nunc expreſſimus:æedem tziphræ dextrorſum veniunt anteponendæ. Vt ſi velles multiplicare 25000, per 7, potes multiplicare ſeorſum 25 per 7, producentur enim 175:quibus ſi antepoſueris 000 ipſius multiplicandi numeri, conſurgent tandem 175000. Tantus eſt numerus,ex præfata multiplicatione procreatus.

*Multiplica. articuli per digitum.*

*Exemplū.*

5 ¶Ex his facilè colligitur multiplicatio compoſiti numeri per articulum, vel ipſius articuli per articulum: de articulo velim intelligas,vbi tziphræ ſolas primas occupant ſedes. Vtpote, ſi propoſitū fuerit multiplicare 173, per 20:multiplicabis 173 per 2,fient 346,quibus antepones articuli tziphram 0,cōſurgent

*Decōpoſiti p articulū, vel ipſius articulum per articulum multiplicatione.*

3460.Hinc patet eundem numerum 173, per 200 multiplicatum, conficere 34600. Item si numerus 1730,per eundem articulum 20 offeratur multiplicandus:duces in primis seorsum 173 per 2, fient rursum 346, quibus geminas antepones tziphras,alteram quidem ex parte multiplicandi, alterã verò ex parte multiplicantis numeri:consurgent 34600. Vel si eundem numerum 1730, per 200 supradicto modo multiplicaueris: producẽtur tãdẽ 346000. Haud alienũ habeto indicium,de quibuscũq; similibus,similitérq; propositis numeris.

Multiplicatio numeri cõpositi per cõpositum.

¶RELIQVVM EST, ostẽdere qualiter cõpositus per cõpositum numerũ multiplicetur: quæ multiplicatio omnium videtur esse difficillima.Hanc ergo multiplicationem,ex præmissa cõpositi numeri per digitum multiplicatione,haud difficilè colligere licet.Subscripto nanq; multiplicante ipsi multiplicando numero,pro ratione limitum, & elemẽtorum ordine,vnà cũ lineola in transuersum de more posita:ducantur singula ipsius multiplicandi numeri, in singula multiplicantis elementa, & singuli subscribantur productorum numerorum ordines, veluti nuper demonstrauimus. sic tamen, vt quẽadmodum numerus ex vnitatũ multiplicatione procreatus, ab ipsis vnitatibus inchoatur: haud aliter qui ex denarũ multiplicatione producitur,ab ipsis denis initietur, & qui ex centenis à cẽtenis, & qui ex millenis à millenis,& sic cõsequenter.Omnes

6

enim limitū digiti, excepto primo, articulum repreſentant numerum: & articulum à denis expreſſum vnica præcedit tziphra o, articulū verò à centenis denominatum duæ oo, & à millenis tres ooo, & ſic deinceps. Idem ergo fit, ac ſi per denarium, centenarium, aut millenarium, &c. propoſitus multiplicaretur numerus. Quoties tamen tziphra o, intermediū aliquē numeri multiplicantis occupauerit limitem: illum ſola tziphra reſpondenter occupabis, & ad ſequentem (ſi occurrit) accedes multiplicationem. His autē productis numeris, ſubſcribes rurſum lineolam tranſuerſalem: ſub qua ipſius additionis officio, in vnum tandem veniunt coaceruandi numerum. Is enim erit, qui ex propoſita numerorum multiplicatione reſultat.

Exemplum multiplicationis cōpoſiti numeri per compoſitum.

❡Obijciatur exēpli cauſa hic numerus 5423, per hunc numerū 1304 multiplicandus. Multiplicatis itaque ſingulis elementis ipſius numeri 5423, per 4 vnitates multiplicantis: producentur 21692. Et quoniam ſequentem numeri multiplicantis limitem, occupat o: ſubſcribitur reſpondenter o, quæ ſecundum producti numeri itidem occupet limitē. Deinde multiplicato eodem numero 5423 per 3, hoc eſt, tres centenas multiplicantis, fiunt 16269, à loco centenarum verſus læuam diſtribuenda: vtpote, quæ poteſtate hunc repreſentant numerū 1626900. Tandem multiplicato præfato numero per 1, idem redit numerus 5423,

à millenis læuorſum ſubſcribendus: nam poteſtate hunc repreſentat numerũ, 5423000. Subſcripta demũ lineola, hi omnes producti in vnũ coaceruentur numerum, quẽ

```
       5 4 2 3
       1 3 0 4
     ---------
     2 1 6 9 2
 1 6 2 6 9.0
 5 4 2 3
 -------------
 7 0 7 1 5 9 2
```

offendes eſſe 7071592. Tantus eſt igitur numerus, ex propoſita multiplicatione reſultans.

Alia multiplicationis exempla.

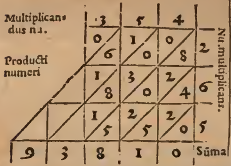
¶Poteris in maiorem artis expreſſionem, duo ſuccedentia diſcurrere multiplicationis exempla. In quorum primo, 20507 per 4510 multiplicata, producunt 92486570. In ſecundo verò, hic numerus 93810, ex multiplicatione 354, per 265 generatur.

```
      2 0 5 0 7   |        3 5 4
        4 5 1 0   |        2 6 5
    -----------   |   ----------
    2 0 5 0 7.0   |      1 7 7 0
  1 0 2 5 3 5     |    2 1 2 4
  8 2 0 2 8       |    7 0 8
  ---------------  |   ----------
  9 2 4 8 6 5 7 0 |    9 3 8 1 0
```

Alius multiplicandi modus omnium facillimus.

¶His addere iuuat, aliũm multiplicandi modum, quo nullus reſeruatur articulus: ijs qui laborant memoriæ labilitate, admodum gratũ. 7 Parandus eſt in primis abacus (vt rem ipſam acu tangamus) lineis inuicẽ parallelis in quadrangula diſtinctus: vnoquoq; quadrangulo, per lineolas tranſuerſales diagonaliter ſubdiuiſo. Supraſcripto poſtmodum multiplicando

numero: ipſius multiplicantis elementa dextrorſum, inſtar gnomonis, pro quadrangulorũ ordine diſtribuatur. Tãdem ſingula multiplicandi numeri, in ſingula multiplicantis elementa ducantur: & producti numeri, in communi locentur quadrangulo, digiti quidem infra diagonalem, articuli verò ſupra.




Componantur tandem ſingulorum numerorum ordines, ſub ipſis diagonalibus lineis tranſuerſaliter cõprehenſi, à dextro & omniũ infimo quadrangulo, exordio ſumpto. Reſultabit enim numerus, ex propoſita multiplicatione generatus. Vt ex obiecto, & de induſtria repetito, cõſpicere licet exemplo: In quo numerus 354, per 265 multiplicatus, producit rurſum 93810.

## De diuiſione prædictorũ integrorum, Cap. 5.

1 DIVIDERE EST, OBLATIS duobus numeris inæqualibus, maiorem ipſi minori æqualiter diſtribuere: vel ipſum minorem numerum, à maiori quoties fieri poteſt artificialiter auferre: diuiſio enim, ſubtractio

*Diuiſionis diffinitio.*

quædam esse videtur Diuidere nanq; numerũ æqualem per æqualem, vanum: & minorẽ per maiorem, est impossibile. Maior itaque numerus, diuidendus: minor verò, diuisor appellatur. qui autem exdiuisione procreatur, quotus non iniuria dicitur: ostendit enim quoties diuisor in ipso diuidendo contineatur numero, siue quotam partem maioris vnicuiq; singulari minoris competentem.

Nu. diuidẽdus. Diuisor. Nu. quot⁹.

Sũmariũ diuisionis artificiũ.

2 ¶ Generalis itaque & omnium fidissimus diuidendi modus est talis, vt sequitur. Subscribantur ipsi diuidendo numero ęquidistãtes lineolæ, & sub illis versus læuam diuisor collocetur numerus: sic videlicet, vt illius vltimum elementum, vltimo ipsius diuidẽdi læuorsum respondeat elemento, & reliqua reliquis suo ordine. ni forsitan numerus ipsi diuisori respondens (qui est pars diuidendi) seorsum consideratus, eodem numero diuisore minor offendatur: tunc enim vltimũ ipsius diuisoris elementum, sub penultimo diuidendi locandũ est elemento. Quibus paratis, cõsideretur quoties diuisor in suprapositio contineatur numero (nulla eorum elementorũ habita ratione, quæ primum diuisoris antecedunt elementum) quod per vltimi elementi diuisoris numeri, cum numero vel elemento suprapositio, & reliquorũ elementorum cum eo qui subinde relinquetur numero diligentem comparationẽ, vel facilè dignoscetur. Is porrò numerus quotus (qui semper erit digitus, & ad summum 9) inter

æquidiſtantes lineolas, ſuper primum diuiſoris elementum collocetur deinde per ſingula diuiſoris elementa multiplicetur: & productus ex qualibet multiplicatione numerus, à ſupra reſpondẽti ſubtrahatur numero, reſiduo (ſi adfuerit) debitè ſupranotato, deletis priùs elementis, à quibus ſubtractio facta eſt. Hoc primo diſcurſu peracto, renouetur diuiſor, proximè relictũ diuidendi præoccupando limitẽ: & diſcurſus priori ſimilis iteretur. ídq; toties continuetur, quatenus primum diuiſoris elementum, primo diuidendi numeri reſpondeat elemento. At ſi contingat ipſum diuiſorẽ, maiorem forſitan eſſe reſpondenti à primo eius elemento verſus læuã numero: ſubſcribatur o, loco ipſius quoti digiti, & diuiſor ipſe (priore cancellato) velut antea renouetur. Quòd ſi operatione finita, aliquid exdiuiſione relinquatur: id operepretiũ eſt eſſe minus diuiſore, & ab illo ſub interiecta lineola poſito denominari. Ex his ſequitur diuiſionẽ tanto faciliorẽ eſſe, quanto diuiſor paucioribus exprimetur elemẽtis ſignificatiuis, aut ſiniſtra elementa ſignificatiua dextris habuerit maiora: tũc enim digitus quotus faciliùs elicitur.

De reſiduo numero.

Notãdum.

3 ¶ Proponatur, exempli, gratia hic numerus 12960, per 32 diuidẽdus. Subſcriptis itaq; parallelis, cũ duo ipſius diuiſoris elemẽta maiorẽ efficiant numerũ, q̃ duo vltima numeri diuidendi: collocandus eſt diuiſor ſub 29, cui ſupra reſpondebunt 129. Et quoniam 3 in 12,

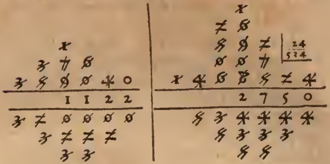
Diuiſionis exemplũ.

atq; 2 in 9 quater inueniuntur: euidens eſt di-
uiſorem ſub ipſis 129 quater contineri. Scribā-
tur ergo 4 ſupra 2 , pro priùs inuento numeri
quoti digito . Poſtmodum auferantur ter 4 à
12, nihil relinquetur: deleantur ergo 12. Aufe-
rantur cōſequenter bis 4, hoc eſt 8, à 9, relin-
quetur vnitas: quæ ſupra 9 priùs deletis anno-
tetur . Renouato poſtea diuiſore per vnicum
limitem verſus dextram, illi reſpondebunt tā-
tūmodò 16: ſcribatur ergo 0/ loco digiti quo-
ti, & renouetur iterum diuiſor. Quo facto, illi
reſpondebunt 160. Et quoniam 3 in 16 quin-
quiēs, & 2 in relicto numero (qui erit 10) quin-
quies itidē reperiuntur: patet illico diuiſorem

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | ~~1~~ | ~~1~~ | |
| ~~1~~ | ~~2~~ | ~~9~~ | ~~6~~ | ~~0~~ |
| | | 4 | 0 | 5 |
| | ~~3~~ | ~~2~~ | ~~2~~ | 2 |
| | | ~~3~~ | 3 | |

quinquies in 160 contineri.
Scribātur ergo 5 inter paral-
lelas. & tollantur ter 5, vtpo-
te 15, ab eiſdem 16: relinque-
tur 1. Auferantur deinde bis
5 à relictis 10, nihil tandem relinquetur. Can-
cellatis igitur diuidendi numeri relictis ele-
mentis, colligentur pro quoto & optato nume
ro 405, oſtendētia diuiſorem ipſum 32, quin-
quies & cēties quater in propoſito numero di-
uidendo contineri. Contemplentur in maiorē
ſingulorum euidentiam , duo ſequentia diui-
ſionis exempla. In quorum primo 359040, di-
uiſa per 320, producunt 1122: In ſecūdo autē
exēplo, 2750, ex diuiſione 1468524, per 534
procreantur, relictis ex diuiſione 24, quæ $\frac{24}{534}$
dicēda ſunt, & breuiùs per $\frac{12}{267}$ repræſentātur.

Alia diuiſionis exēpla.



4 ¶Alium porrò diuidendi modum, tibi demũ excogitauimus: quo laboriosas(dum occurrerint)faciliores reddere poteris numerorum diuisiones.Scribantur ergo seorsum nouem elementa significatiua,ab 1 in 9 descendendo distributa.Deinde ad læuam vnitatis regionem, diuisor ipse collocetur.hic postea dupletur:& productus numerus,subscribatur è regione binarij.Cui duplato numero, ipse diuisor addatur:& inde consurgẽs numerus,è regione ternarij constituatur.Huic rursum numero,idem adijciatur diuisor: & qui resultabit,è læua regione quaternarij collocetur.Et sic deinceps, donec ad nouenariũ peruẽtum sit elemẽtum. Vt de numero 54, ex sequenti formula exemplum capere vel facilè potes:cuius adminiculo, datus quiuis numerus,per ipsum numerũ 54 promptissimè diuidi poterit.

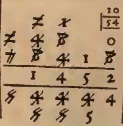
*Facilior ac expeditior diuidendi modus.*

¶Esto in exemplum datus numerus 78418, per ipsum numerũ 54 diuidendus. Subscriptis igitur 54, ipsis 78 vltimis numeri diuidendi elementis : notetur 1 super 4, inter lineas

*Exemplũ diuisionis per secũdũ modum.*

parallelas(nã 54 in 78 ſemel contineri, prima frõte fit manifeſtum)& ſubductis ſemel 54 ab ipſis 78, relinquentur 24, quę ſupra notētur, & deleantur 78. Poſtea renouetur diuiſor (priore cancellato) cui ſupra reſpondebũt 244, quæ nõ ſunt in diuiſoris formula: accipiatur ergo proximè minor numerus 216, & 4 è regiõe dextra pro quoto digito inter liſneolas collocãdo. Et detractis 216, à 244,

| Numeri ex continua diuiſoris additione producti | Digiti pro quoto numero ſumendi |
|---|---|
| Diuiſor 54 | 1 |
| 108 | 2 |
| 162 | 3 |
| 216 | 4 |
| 270 | 5 |
| 324 | 6 |
| 378 | 7 |
| 432 | 8 |
| 486 | 9 |



relinquentur 28: quibus ſupra notatis, & deletis 244, renouetur iterum ſolito more diuiſor. Cui reſpondebunt 281, quæ non ſunt in ipſa diuiſoris formula: accipiatur ergo proximè minor numerus 270, & ad dextrã illius 5, pro quoto digito. Subtractis autem 270 ab ipſis 281, relinquentur 11: deleantur ergo 28, & notetur 1 ſuper 8. Tandem conſtituto diuiſore ſub reſiduis 118, accipiatur expræfata formula proximè minor numerus, vtpote 108, & 2 ad dextrã pro quoto digito: quo notato, ſubtrahantur 108 ab ipſis 118, relinquentur 10, quæ poſita ſuper 54 efficient $\frac{10}{54}$. Concludẽdũ igitur, 78418, diuiſa per 54, procreare 1452, relictis $\frac{10}{54}$. Haud aliter facito, de cęteris quibuſcunque numerorum diuiſionibus.

## De eorundem integrorũ reductione. Cap. 6.

1 REDVCERE EST, NVMERVM potentia grossiorem, in subtiliorem, aut è diuerso reuocare. Grossiores potẽtia dicũtur numeri, qui extrinsecam denominationem sortiti sunt maiorem: Subtiliores verò, qui minorem. Vt in monetis, franci dicuntur maiores duodenis: & duodeni, turonis itidẽ maiores. Idẽ habeto iudiciũ, de quibuscũque similibus.

*Reductionis diffinitio.*

2 Fit autem reductio numeri potentia grossioris in subtiliorem, per multiplicationem: in hunc qui sequitur modum. Consideretur quot singularia subtilioris contineat vnum singulare grossioris, & per numerum quotum reducendus multiplicetur numerus: producetur enim numerus grossioris, in subtiliorẽ reuocatus. Vt in monetis (verbi gratia) si proponãtur 150 franci, in duodenos reducendi, multiplicentur 150 per 20, producentur 3000: tantus est francorum in duodenos reductus numerus. Quòd si eosdẽ 3000 duodenos, reducere iuuet ad turonos, multiplicẽtur 3000 per 12: resultabunt 36000 turoni. Francus enim, continet 20 duodenos: & vnus duodenus, turonos 12. Horum exemplorum, subscriptas libet addere formulas.

*Reductio grossiorũ in subtiliora.*

*Exemplũ.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Franci reducẽdi. | 150 | Duodeni reducendi. | 3000 |
| Duodeni 1. franci. | 20 | Turoni 1. duodeni. | 12 |
| Duodeni reducti. | 3000 | Turoni reducti. | 36000 |

Ruductio subtiliorũ in grossiora.

¶Ruductio verò numeri subtilioris, in numerum potentia grossiorem: officio diuisionis sic absoluitur. prescrutãdũ est in primis, quot singularia subtilioris cõficiant vnũ singulare grossioris numeri. Nam si per quotum numerum, subtilior & reducẽdus partiatur numerus: procreabitur numerus, ex ipsa diuisione prouenien- 3

Exemplũ.

ens. Vt si præfatos 36000 turonos, vertere libuerit in duodenos, diuidẽdi sunt ipsi 36000 turoni per 12: prodibunt 3000 duodeni. Quos si expediat ad francos reuocare, diuidendus est idem numerus 3000 per 20: prouenient enim franci 150. Quoniam 12 turoni, efficiunt 1 duodenum: & 20 duodeni, 1 francũ. Sequuntur præductorũ exemplorum formulæ.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 1 |
| Turoni reducẽdi. | 3 6 0 0 0 | Duodeni reducẽdi. | 3 0 0 0 |
| Duodeni reducti. | 3 0 0 0 | Franci reducti. | 1 5 0 |
| Turoni 1. duodeni. | 1 2 2 2 2 | Duodeni 1. franci. | 2 0 0 0 |
| | 1 1 1 | | 2 2 |

De residuo post diuisionem.

¶Porrò si aliquid ex ipsa diuisione (vt plerũq; fit) relinquatur: id à reducendo, aut diuisore denominandum est numero. Vtpote, si 345 duodenos, ad francos reducere fuerit operæpretium: absoluta diuisione 345 per 20, fient pro quoto numero 17 franci, relictis 5 duodenis, qui vnius franci $\frac{5}{20}$ conficere videntur. 4

| | |
|---|---|
| | 1 |
| Duodeni. | 3 4 5 |
| Franci. | 1 7 |
| | 2 0 0 |
| | 2 |

Notandũ.

¶Reductio itaq; numerorũ specie plurimũ inuicem distantiũ, per continuatã intermediorũ 5

& proximè ſuccedentium numerorum redu- ctionem abſoluēda eſt. Commodiùs enim re- ducūtur franci ad duodenos,& duodeni poſt- modum ad turonos : quàm franci immediatè ad turonos,aut è diuerſo.Quod autem hic de monetis in exemplum reuocauimus : de pon- deribus,menſuris,atq; ſimilium rerum,vel ma gnitudinum inuicem reducibilibus partibus, reſpondenter & cenſendum & operandū eſſe velim intelligas.Sed hæc ſatis.

### *De inuentione quadratæ radicis in nume- ris integris,* Cap. 7.

1 QVADRATVS NVMERVS eſt, qui ex ductu alicuius numeri in ſeipſum producitur : ad ſimili- tudinē quadrati geometrici,quod per motū lineæ rectæ iuxta pro- priam longitudinē abſtractiuè figuratur. Ra- dix verò quadrata, ſiue latus quadrati nume- ri,eſt numerus per ſuiipſius multiplicationem quadratum efficiens numerum.

*Quadrati numeri diffinitio.*

*Radix quadrata.*

Vt obiecta nu meri 16,videtur exprimere figura:




cuius latus quodlibet , ſiue radix eſt 4,area verò 16 vnitatibus con texta. Quadratam igitur radicem dati extrahere numeri, eſt nume- rum artificialiter inuenire , qui in ſeipſum ductus præfatum reſtituat numerum, ſi fuerit quadratus:vel quàm maximū poterit quadratum,in eodē numero contētum.Omnis

*Quid inuenire radicē quadratā.*

itaq; numerus, alicuius numeri quadrata videtur esse radix: tametsi non omnes numeri, sint quadrati. Ducere igitur numerum in seipsum, & quadratè multiplicare, idem sunt. Sicut tandem omnis figura rectilinea, in quadratũ resoluitur: sic omnem numerum, per extractionem radicis, in quadratum vertere nituntur Arithmetici. Inuenitur autem radix quadrata alicuius numeri, per viam diuisionis: hoc excepto, quoniam in diuisione diuisor ipse cum diuidẽdo proponitur numero, hic verò & diuisor & quota radix simul inuestigantur.

Quadratè multiplicare.

¶Vt igitur inuentionis quadratæ radicis artificium, clariùs intelligi possit: artem ipsam, cũ exemplo simul discurrere est operæpretium. Sit igitur (vt ad rem ipsam deueniamus) datus hic numerus 5308416, cuius quadratam oporteat inuenire radicem. Huius itaque numeri bina elementa, intercidentibus lineolis, à dextris sinistrorsum progrediendo separentur: nec curandũ est, an læua & vltima distinctio, vnicum, vel duo comprehendat elementa. Duæ postmodum (vt in diuisione) subscribantur parallelæ, futurã radicem, vt quotum in ipsa diuisione contenturæ. Erunt igitur tot radicis elementa, siue limites, quot in ipso numero dato acciderint distinctiones. Et quoniã numerus vnico vel duobus elemẽtis expressus, radicem habet vnius duntaxat elemẽti, & ex læua & vltima distinctione 5 solummodò relinquuntur, quæ nõ faciunt quadratũ

2

Ars inueniendi quadratã oblati numeri radicem.

Primæ radicis discursus.

numerũ: accipiendus eſt igitur numerus quadratus proximè minor, vtpote 4, cuius radix eſt 2, ſcribenda ſub 5 intra parallelas. Et ſubtractis 4 ab ipſis 5, reliqua ſupra notetur vnitas. Dupletur tandẽ ipſe radicis digitus, fient 4: quę infra parallelas, ſub 3, hoc eſt, immediatè præcedenti limite collocentur. Hoc igitur modo, primus radicis digitus, ex ſola nouem digitorũ in ſeſe facta multiplicatione dignoſcitur: quam in expeditiorem omnium inuentionem, obiecta perſtrinximus tabella. Cõtinet enim ipſa tabella ſingulos numeros quadratos, ex nouem digitis quadratè multiplicatis reſultantes: qui cæteris etiam radicis poterunt inſeruire digitis.

```
1
5 | 3 0 | 8 4 | 1 6
2
─────────────────────
    4
```

| | Digiti. | Quadrati. |
|---|---|---|
| Semel | 1 | 1 |
| Bis | 2 | 4 |
| Ter | 3 | 9 |
| Quater | 4 | 16 |
| Quinquies | 5 | 25 |
| Sexies | 6 | 36 |
| Septies | 7 | 49 |
| Octies | 8 | 64 |
| Nonies | 9 | 81 |

Secundus radicis diſcurſus.

¶Secundus autem radicalis digitus, in hũc modum conſequenter inueniendus eſt. Diuidantur 13, quæ duplato reſpondent numero, per ipſum duplatũ, vtpote per 4, prouenient 3: quę ducta in ipſa 4, faciunt 12, quibus ſi addatur quadratum ipſorum 3, vtpote 9, conſurgent 129, quæ poſſunt auferri à 130. Scribãtur

ergo 3 intra parallelas ſub o, hoc eſt, dextro elemento proximis lineolis comprehenſo. Et ducantur 3 in 4, fient 12: quæ tollantur à ſupra reſpondentibus 13, relinquetur vnitas, notanda ſuper 3, deletis eiſdem 13. Poſtea ducãtur 3 radicis in ſeſe, fient 9: quæ tollãtur à 10, relinquetur iterũ vnitas, quæ notetur ſuper o, ipſis 10 priùs deletis. Duplentur tandẽ 23 inuenta radicis elementa, fient 46: quæ ſub 18, ab immediatè præcedenti limite verſus læuã, infra parallelas (deleto priori duplato) veniunt annotanda, vt hęc oſtendit formula.

|   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ~~1~~ | ~~1~~ | 1 |   |   |   |   |
| ~~5~~ \| | 3 | ~~0~~ \| | 8 | 4 \| | 1 | 6 |
| 2 | 3 |   |   |   |   |   |
|   | ~~4~~ | 4 | 6 |   |   |   |

Tertius radicis diſcurſus notandus.

¶ Et quoniam ſuper ipſa 46, reſpondent tantũ 18, quæ per eadem 46 diuidi non poſſunt: idcirco habundaret vnitas, pro tertio radicis digito. Scribenda eſt igitur o, intra parallelas, ſub 4, loco digiti radicalis, quæ ipſum radicis occupet limitem (Id autem toties obſeruetur, quoties duplatus numerus maior fuerit ſuprapoſito) Deletis poſtmodum ipſis 46, duplentur rurſum 230, hoc eſt, inuẽta radicis elementa, cõſurgent 460: quæ infra parallelas de more collocentur, o quidem ſub 1, & reliqua ſuo verſus læuam ordine: vt præſens habet numerorum formula.

|   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ~~1~~ | ~~1~~ | 1 |   |   |   |   |
| ~~5~~ \| | ~~3~~ | ~~0~~ \| | 8 | 4 \| | 1 | 6 |
| 2 | 3 | 0 |   |   |   |   |
|   | ~~4~~ | ~~4~~ | ~~6~~ | 6 | 0 |   |
|   |   |   | 4 |   |   |   |

*Quartus radicis discursus.*

❡ Ad quarti demum & vltimi digiti radicalis inuentionẽ accedendo, diuidatur numerus 1841, ſupra 460 duplatũ occurrens numerum, per ipſa 460, fient pro quoto numero 4: quæ ducta in 460 efficiunt 1840, vnde relinquetur vnitas, quæ vnà cum 6 faciet 16, à quibus quadratũ ipſorum 4 poterit auferri (ſi autem non poſſet auferri, accipiendus eſſet digitus vnitate minor) Scribantur ergo 4 ſub 6, intra parallelas. Poſtea ducãtur ipſa 4, in 4 numeri duplati, fient 16: quæ tollantur à 18, relinquentur 2 notanda ſuper 8, deletis priùs eiſdem 18. Ducantur rurſum eadẽ 4 in 6, fient 24: hæc ſubducta à ſupra reſpondentibus 24, nihil relinquunt. deleantur ergo 24: & ducantur tandem 4 radicis in ſeſe, fient 16, ſubducenda à reliquis 16, & nihil demum relinquetur. Vnde præaſſumptus numerus 5308416, eſt quadratus: & eius latus, ſiue quadrata radix 2 3 0 4.

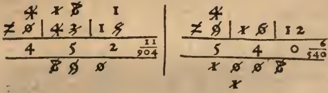
```
  1    1  1    2
  5 | 3  0 | 8  4 | 1  6
  ----------------------
  2       3       0     4
  ----------------------
       4  4  6  6  0
             4
```

*Notandum pro numeris nõ quadratis.*

3 ❡ Quòd ſi forſitan (vt frequẽtiùs accidit) aliquis tandem relinquatur numerus: oblatus in primis numerus non erit quadratus, tantóque magis à quadrato diſtabit, quãto reſiduum ipſum fuerit maius. Debet autẽ idẽ reſiduum, ſi parẽ fecerit numerũ, à duplata radice (inſtar fractionis) denominari, vel ipſius dimidium ab ipſa radice, vbi parem fecerit numerum: &

integrę radici tandẽ ſuperaddi. Hoc enim mo do collecta radix, ſatis erit propinqua verita ti. Velut ex ſubſcriptis elicere poteris exem plis, in maiorem eorum quæ diximus elucida tionem adiunctis. In quorum primo, numeri 204315, radix integra eſt 452: relictis 11, quæ $\frac{11}{904}$ dicenda ſunt, bis enim 452, efficiunt 904. In ſecundo autem exemplo, numeri 291612 quadrata radix, eſt 540: relictis 12, quorum di midium (vtpote 6) poſitum ſupra radicem, fa cit $\frac{6}{540}$, quæ breuius per $\frac{3}{270}$ repręſentantur. Nunquam tamẽ, in nõ quadratis numeris, ve ram habebis radicem: & data quantũuis præ ciſa, ſemper tamen pręciſior dabitur, vt ex ſe quentibus depręhendere vel facilè licebit.

*Alia extractionis quadratæ radicis exempla.*



*Notandũ.*

Procedimus autem in quadratarũ radicum in uentione, per binas elementorum dati nume ri ſeparationes, & duplationes inuentorũ di gitorũ ipſius radicis: quoniam ad procreatio nem numeri quadrati, duo ſimiles & æquales concurrunt numeri, ex quorũ multiplicatione idem quadratus fit numerus. Radix enim qua drata in ſeipſam ducta, binos tales videtur re præſentare numeros: quaſi bis ſumpta, altera per alteram multiplicetur.

4 ¶ALIVM LIBET ADIVNGERE MOdum inueniendarum non quadratorum numerorum radicum, longè quidem præcisiorẽ cæteris: ídq́ per fractiones sexagenarias (de quibus libro tertio) Mathematicis familiares. Dato itaq́ numero, cuius radix quadrata vtcunq́ præcisa desyderetur, antepone dextrorsum quotquot volueris tziphrarum binarios, vtpote, 00, aut 0000, vel 000000. Resultantis inde numeri, quadratam (vti nuper docuimus) extrahe radicem, neglecto si abundauerit residuo. Tolle postmodũ ab ipsa radice tot elementa dextra, quotus est dimidius antepositarum tziphrarum numerus: & reliqua versus læuam occurrẽtia, pro integra seruato radice. Detracta consequenter elementa, multiplica per 60: & à producto numero, tolle rursum tot elementa dextra, quot sunt adiunctarum tziphrarũ binarij: occurrentem autem ad læuam numerum, reponito in primorum minutorum ordinem. Ipsa rursum elementa subtracta, duc in 60, & à producto numero, aufer totquot priùs elementa dextra: & relictũ ad læuam numerum, fac secundã eiusdem integræ radicis fractionem, ab ipsis secundis denominatam. Id autem toties cõtinuetur, quousque solæ detrahantur tziphræ. Hoc enim modo, radicem integram, vnà cum minutis & secundis, vel vltra (si libuerit) satis præcisam obtinebis. Quot igitur tziphrarum anteposueris binarios, tot habebis fractionum genera: &

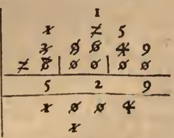
Radices nõ quadratorum numerorũ, præcisiores inuenire.

Notãdum.

proinde tanto præciſiorem radicem. Item ſi læuum ſubductorum elementorum fuerit tziphra, illud erit abijciendum: ſed prima fractio tunc erit ſecundorum, abſq; minutis.

Exēplū ſecundi modi inueniendarum radicum quadratarum.

¶Eſto propoſitum, inuenire quadratam radicem numeri 28. huic anteponantur in exemplum quatuor tziphræ: cōſurget hic numerus 280000. Cuius radix, per antecedentem doctrinam, eſt 529, relictis 159 minimè curādis: vt ſubiecta habet formula. Tollantur ergo 29 (nā duo tziphrarum binarij antepoſiti ſūt) relinquētur 5, pro integra radice. Ducantur poſtmodum 29 in 60, fient 1740: tollantur rurſum 40, & ipſa 17 reponantur in minutorum ordinem.



Multiplicentur conſequenter 40 per 60, producentur 2400: auferantur 00, relinquentur 24, quæ ſecunda dicentur. Et quoniā vltimò detracta elementa ſunt 00, non eſt vltra progrediendū. Radix ergo quadrata numeri 28, eſt 5 integrorum, vnà cum 17 minutis integri, & 24 ſecundis vnius minuti.

Notādum.

Poterunt (ſi volueris) ipſa 29, in denariā fractionis rationem immediatè reuocari: ſic vt 2 ſignificent $\frac{2}{10}$ vnius integri, & ipſa 9 vnius decimæ $\frac{9}{10}$, quæ ferè $\frac{3}{10}$ conficiunt, qualem fractionem haberes per primum extrahendi modum.

## De *Cubicæ radicis inuentione,* Cap. 8.

1 CVBVM SOLEMVS APPELLARE numerum, qui ex ductu alicuius numeri in seipsum, & rursum in productũ generatur. Radix porrò cubica, siue latus cubicum, est ipse numerus supradicto modo multiplicatus, cubum efficiens numerum. Cubicè ergo multiplicare, est datum numerum in seipsum, & rursum in productũ ducere. Et proinde cubicã extrahere radicẽ, est numerũ artificialiter colligere: qui ductus in se cubicè, datum efficiat numerũ, si fuerit cubus, vel maximũ cubũ in ipso numero dato cõprehẽsum. Imaginatur ergo numerus cubus, instar corporis Geometrici sex quadratis superficiebus terminati, solidus: qualem obiecta ipsius octonarij & cubi numeri videtur reprę sentare figura, cuius latus siue radix cubica est 2.

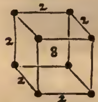
Nu. cubus.

Radix cubica.

Cubicè multiplicare.

cubicã extrahere radicẽ quid.

Exemplum numeri cubi.




2 Vt igitur ad cubicæ radicis inuentionem paucis accedamus: adnimaduertendum est in primis, ad cubi numeri procreationem, tres similes & inuicem æquales concurrere numeros. quorum primus ductus in secundum, facit quadratum: qui tandem per tertium multiplicatus numerum, restituit cubũ. quos quidem numeros, radix ipsa cubica ter sumpta repræsentat. Quæcunque igitur per binarium,

Summaria cubicarum radicũ adinuentio.

& vnicam multiplicationem in quadratis absoluimus numeris: per ternarium, & geminam siue cubicam multiplicandi rationem, in cubis respondenter venit obseruandum. Inuentio itaque radicis cubicæ, haud multum dissimilis est ei, quam de quadratis nuper tradidimus numeris: hoc in primis excepto. Quoniam dati numeri elemēta, à primo versus læuam intercidentibus lineolis trina separantur: & sub dextro cuiuslibet ordinis elemento, radicales constituuntur digiti; qui tot semper erunt, quot & ipsorum elementorum distinctiones. Inuentus autem & sub vltimo elementorum ordine constitutus primus radicis digitus, cubicè multiplicatur: & subtracto illius cubo à superiori numero, ipse digitus triplatur, productíque numeri primũ elementum, sub medio proximi ordinis elemento, infra lineas æquidistantes collocatur, cæteris læuorsum ordine distributis. Secundus deinde radicis digitus, vnà cum priùs inuēto in triplatum ducitur numerum: & productus inde numerus, per ipsum digitũ (quod nō fit in quadratis) rursum multiplicatur. Facta postmodum producti subtractione, à numero supra triplatum posito: is tandem digitus cubicè multiplicatur, & resultans cubus à residuo tollitur numero. Ambo demum reperti digiti triplantur: & consurgentis numeri primũ elementum, sub medio rursum proximi ordinis elemēto, infra lineas parallelas constituitur, cæteris versus læuã suum

obſeruantibus ordinẽ. Idẽ conſequẽter de tertio digito cũ duobus primis, quod de ſecũdo cũ ipſo primo faciendũ iuſſimus, venit reſpõdenter obſeruandum: atque toties continuandum, quatenus ad primum oblati numeri peruentum fuerit elementum.

3 ¶ Tota ergo difficultas artis, ex ipſa radicalium digitorum inuentione pendere videtur. Primum itaq; digitum, & ex ſingulis digitis in ſeſe cubicè multiplicatis procreatos numeros, ex hac potes elicere tabella: ſumpto ad læuam digito, & ad dextram eius cubo. Reliquos autẽ digitos ab ipſo primo, hoc examinabis artificio. Decupla iã inuentum radicis numerum, ſolam anteponendo tziphram: & inde reſultantem numerum duc in triplatum, & per productum diuide numerũ ipſi triplato ſuperpoſitũ. Quotus enim ex diuiſione procreatus digitus, erit pro radicali ſumendus: dum modò à reſiduo, & vnà cum dextro elemento conſurgẽte numero, cubus ipſius digiti ſubtrahi poſſit. Secus enim eueniente, digitus ipſe ſola vnitate vel ad ſummũ binario

Expedita digitorum radicalium adinuẽtio.

| | Digiti. | | Cubi. |
|---|---|---|---|
| Semel | 1 | ſemel, | 1 |
| Bis | 2 | bis, | 8 |
| Ter | 3 | ter, | 27 |
| Quater | 4 | quater, | 64 |
| Quinquies | 5 | quinquies, | 125 |
| Sexies | 6 | ſexies, | 216 |
| Septies | 7 | ſepties, | 343 |
| Octies | 8 | octies, | 512 |
| Nonies. | 9 | nonies, | 729 |

[library stamp]

minorandus erit. Hinc patet, quoties numerus triplato suprapositus, per decuplum inuētę radicis numerum diuidi minimè poterit, tziphram o loco digiti radicalis esse notandam: atq; ipsam radicem, ex eadem o & priùs inuētis digitis resultātem esse triplandam, & triplatum ipsum numerum sub lineis parallelis suprascripto modo distribuendum.

Exēplū extractionis cubicæ radicis.

¶Sit datus in exemplū numerus 40001688, 4 cuius radix cubica desyderetur. Separatis igitur (vti nunc diximus) elemētis, & subscriptis de more parallelis: offendentur in extremo ordine 40. Cubus autem maximus in eo contentus numero, est 27, cuius radix est 3. notentur ergo 3, sub 40: & ab illis detrahātur 27, relinquētur 13. Quibus supranotatis: triplentur 3, fient 9, infra lineas, sub medio proximi ordinis (scilicet 001) elemento, vt in hac vides formula, notāda.

```
 1 3
 4 0 | 0 0 1 | 6 8 8
-------------------
   3
-------------------
        9
```

Discursus secundi radicalis digiti.

Postea, decuplentur 3, fient 30: quæ ducta in 9, efficiunt 270. Diuidantur ergo 1300, per 270: prodibunt 4, relicto satis copioso numero. Scribantur ergo 4 sub 1, & ducantur 34 in 9, fient 306: quæ rursum multiplicata per 4, reddunt 1224. His detractis ex 1300, relinquentur 76: quæ notabis super 00, deletis 13. Cubus autem ipsorum 4, est 64: quo subtracto ex residuo numero, scilicet 761, relinquentur 697, scribenda super 761,

```
     6 9
 1 3 7 6 7
 4 0 | 0 0 1 | 6 8 8
 ---------------------
   3      4
 ---------------------
       6 1 0 2
```

Triplentur tãdem 34, fient 102, infra parallelas, ſub 768 (vt hic vides) diſtribuẽda: deleto priùs triplato numero. His abſolutis, decuplentur 34, fient 340: quæ ducta in 102, efficiunt 34680. diuidantur ergo 69768, per 34680, prouenient 2: quæ locentur ſub primo totiùs numeri elemento, intra lineas parallelas. Ducantur poſtmodum 342, in 102, fient 34884: hæc rurſum per 2 multiplicentur, conſurgent 69768. quæ dempta ex ſupra reſpondentibus 69768, nihil relinquunt: deletis ergo 69768, detrahatur cubus ipſius 2 (vtpote 8) à reliqs

Tertius radicis diſcurſus.

```
     6 9
 1 3 7 6 7
 4 0 | 0 0 1 | 6 8 8
 ---------------------
   3      4       2
 ---------------------
       6 1 0 2
```

8, nihil tandẽ relinquetur. Concludes igitur, prę aſſumptũ numerũ 40001688 eſſe cubũ: & cubicã illius radicẽ, 342.

5 ¶Cùm autem extracta radice, aliquis (vt ferè ſemper accidit) remanſerit numerus: is à triplata radice, vel tertia illius pars (aut tertiæ parti propinqua) ab ipſa radice denominetur. Quanto porrò idem reſiduũ maius fuerit, tanto plus numerus datus diſtabit à cubo numero, ex integra radice procreato, & magis accedet ad proximè ſuccedẽtẽ cubicum. In exemplum horũ reſiduorũ, ſequentes numerorũ libuit annectere formulas. In quarũ prima,

Notandum de numeris nõ cubis.

Alia inuentionis cubicæ radicis exempla.

numeri 15638 radix cubica est integrorũ 25: relictis 13, quæ $\frac{13}{75}$ dicenda sunt, ter enim 25 efficiunt 75. In secunda porrò formula, numeri 8120613 cubica radix est 201: relictis 12, quorum tertia pars est 3, quibus subscribenda est ipsa radix in hunc modum $\frac{3}{201}$. Radix ergo cubica primi numeri, est 25 & $\frac{13}{75}$: ipsius verò secũdi numeri cubica radix, 201 vnà ferè cũ $\frac{3}{201}$.

<table>
<tr><td>7 1 1 3</td><td>2</td></tr>
<tr><td>1 5 | 6 3 8</td><td>8 | 1 2 0 | 6 1 3</td></tr>
<tr><td>2 5 $\frac{13}{75}$</td><td>2 0 1 $\frac{3}{201}$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>6 6 0</td></tr>
</table>

Non sunt tamen veræ radices: nam in numeris minimè cubis (sicut & in non quadratis numeris) nunquam dabilis est radix quantumuis propinqua veritati, quin liceat inuenire præcisiorẽ. Nec te prætereat, in naturali serie numerorum, ab 1 vsque ad 1000000, pro decem numeris quadratis vnicum occurrere cubum.

*Ars inueniendi radices cubicas præcisiores.*

¶ IVVAT ET ALIVM TRADERE 6 modum, quo radix non cubi numeri, præcisa magis extrahitur: ídque rursum per sexagenarias Astronomorum fractiones, quæ vniuersis rerum supputationibus indifferenter adcommodari possunt. Anteponantur igitur dato numero tot tziphrarũ ternarij, quot libuerit habere fractionũ differentias, præter radicẽ integram: vtpote 000, vel 000/000, aut 000/000/000, & sic quantumlibet, ternario semper adiuncto thzipharum numero. Consurgentis inde numeri cubica radix extrahatur, vti nunc

præcepimus: neglecto, si contigerit, residuo. Tollantur postmodum ab ipsa radice tot elemēta dextra, quot fuerint antepositarum tziphrarum ternarij: quæ autem ad læuam relinquentur elementa, pro integra radice sumantur. Detracta consequenter elementa, ducantur in 60: & à producto numero tot dextra subtrahantur elementa, quot dempta sunt ab ipsa radice: relictus autem ad læuam numerus, in minutorum redigatur ordinem. Subtracta rursum elementa dextra, per eundem numerum 60 multiplicentur: & à producto numero, tot quot priùs subducantur elementa dextra: numerus autem læuorsum derelictus, pro secundis accipiatur. Id'que deinceps cōtinuetur, quatenus detracta elementa sint omnino tziphræ: quæ rursum in vanum per sexagenarium multiplicarentur numerū. Quanto plures igitur anteposueris tziphrarum ternarios, tanto plures fractionum colligentur differentiæ: & radix proinde cubica tanto percisior. Memineris tamē (vt in quadratis) si detractorum ab ipsa radice elementorum sinistrū fuerit tziphra 0, illud esse reijciendum: túncque nulla radicis procreari minuta, sed immediatè secunda.

Notādum.

7 ¶Esto propositum inuenire radicem cubicam numeri 37: huic (exempli gratia) duo præponantur tziphrarum ternarij, consurgent 37000000. Quorū radix cubica, per antecedentem doctrinam adinuenta, est 333: relictis

Exēplū secūdi modi extrahendarū cubicarum radicum.

73963,quæ nullo modo curanda ſunt. Tollantur ergo duo prima elementa ſcilicet 33 (nam duo tziphrarũ antepoſiti ſunt ternarij) relinquẽtur ad læuã 3,pro radice integra.

```
          7
          ø         6
x  ø      ø  3   9  ø  3
3  7 |  ø  ø  ø | ø  ø  ø
   3        3         3
          ø      ø  ø
```

Ducantur poſtmodum 33 in 60, conſurgent 1980. à quibus duo prima ſimiliter detrahantur elementa,vtpote 80:nam relicta 19,erunt prima minuta,poſt integram radicem collocãda. Multiplicentur rurſum 80 per 60, producẽtur 4800:ſublatis ergo duabus tziphris 00, ipſa 48 in ſecundorum redigantur ordinem. Et quoniam elementa detracta ſunt 00 , non eſt vltra procedẽdum.Radix ergo cubica numeri 37,comprægendit integra 3, minuta 19, ſecunda 48 , quæ ferè conficiunt vnum integri tertium.

¶ *De progreſſione eorundem numerorum,* Cap.9.

Progreſſionis diffinitio.

PROGRESSIO EST, NVMErorum ſecundum æquales vnitatum differentias , aut proportionatas differẽtiarum rationes,ordinata ſucceſſio . Quæ per æquales progreditur vnitatum differentias , arithmetica dicitur: quæ autem differentiarũ proportiones obſeruat , geometrica progreſſio nuncupatur. Vtraque tamen ab vnitate , aut

Progreſſio duplex.

dato quouis numero quantũlibet progrediendo continuatur: nunquam enim dabitur maximus oblatæ progreſſionis numerus : cùm numeri progrediãtur in infinitum. In primis igitur de arithmetica dicendum.

2 ¶Progreſſio quæ arithmetica dicitur, aut omnino inter pares, aut omnino inter impares, aut partim inter pares partim verò inter impares alternatim ſuccedẽtes offenditur numeros. Si à naturali numerorum ordine ab vnitate in infinitum progrediente, pares ſeparẽtur numeri: conſurget parium, & relinquetur imparium numerorum progreſſio prima, ex continuata binarij reſultans additione. Vt oſtendunt duo primi numerorum ordines, ſuccedẽtis deſcriptionis. Quòd ſi progreſſio à ſecũdo parium vel imparium exordiatur limite, vtpote à 3 aut 4, & ternario progrediatur vnitatum incremento: ea partim ex paribus, partim verò ex imparibus cõſtabit numeris. quemadmodũ ex tertio & quarto præfatæ deſcriptionis depræhenditur ordinibus. Quæ ſi à tertio eorundem parium vel imparium limite fuerit initiata, ſcilicet à 5 vel 6, & quaternaria progrediatur vnitatum ſucceſſione: quę à pari exordietur numero paribus, quæ verò ab impari imparibus cõflabitur numeris. Veluti quintus & ſextus ordo, eiuſdem deſcriptionis oſtẽdunt. Progreſſio rurſum à quarto parium vel imparium procedẽs limite, vtpote à 7 vel 8, & quinario vnitatum progreditur augmento:

De arithmetica progreſſione.

partim rursum paribus, partim verò imparibus cõstabit numeris. Quemadmodũ septimus, & octauus ordo præfatæ descriptionis, apertè manifestant. Et sic deinceps quãtũlibet: nunc parium, aut imparium numerorum, nunc verò parium & imparium simul alternatim iteratis progressionibus.

¶ Tabula progressionum tam parium, vel imparium, quàm parium & imparium simul numerorum.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | Impares. |
| | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | Pares. |
| 3 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 | 33 | Pares & impares. |
| | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 | 25 | 28 | 31 | 34 | |
| 4 | 5 | 9 | 13 | 17 | 21 | 25 | 29 | 33 | 37 | 41 | 45 | Impares. |
| | 6 | 10 | 14 | 18 | 22 | 26 | 30 | 34 | 38 | 42 | 46 | Pares. |
| 5 | 7 | 12 | 17 | 22 | 27 | 32 | 37 | 42 | 47 | 52 | 57 | Pares & impares. |
| | 8 | 13 | 18 | 23 | 28 | 33 | 38 | 43 | 48 | 53 | 58 | |
| 6 | 9 | 15 | 21 | 27 | 33 | 39 | 45 | 51 | 57 | 63 | 69 | Impares. |
| | 10 | 16 | 22 | 28 | 34 | 40 | 46 | 52 | 58 | 64 | 70 | Pares. |

Omnes autem supradictę & similes quæcunque progressiones, continuæ vocitantur. Est enim progressio continua, in qua eadem vnitatum continuatur differentia. Progressio autem, quæ sub duabus aut pluribus comprehẽditur differentijs, alternatim interculatis, discontinua dicitur. Cuiusmodi sunt omnes progressionum ordines ipsius antecedentis descriptionis, à quolibet verticalium & imparium numerorum descendendo coassumpti.

Progressio continua.

Discõtinua

Exẽpli gratia, ordo initiatus à 3, & finitus in 16, nunc vnitatis, nunc verò binarij alternatim resumpta successione progreditur. Et sic de cæteris.

3 ℭ Reliquum est, ostendere qualiter numeri arithmetica successione progredientes (præter traditum additionis artificium) in vnum componantur numerum. Multa enim absconsa, & penè incredibilia (vt alibi ostendemus) vtriusq; progressionis dissoluũtur adminiculo. Compone igitur extremos datæ cuiuscunque progressionis arithmeticæ numeros. etsi parẽ efficiant numerum, per ipsius numeri dimidiũ multiplicentur ipsorum progressionalium numerorum ordines siue limites: consurget enim eorundem numerorum summa. Si autem ex ipsa extremorũ additione, impar cõsurgat numerus, is in dimidiam limitũ seu progressionalium numerorũ ducatur multitudinem: resultabit enim eorundem numerorũ, sub data progressione contentorum summa. Accipiantur in primæ partis exemplum, antecedentis primæ progressionis ipsorum parium extermi numeri, scilicet 2 & 22. hi simul iuncti efficiunt 24 parem numerum, cuius dimidium est 12: progressionalium autem numerorum limites sunt 11, quę ducta in 12 efficiunt 132. Tanta est progressionis summa. In secundæ verò partis exemplum, accipiatur ordo progressionis discontinuæ à ternario initiatus, & finiens in 16. Igitur cùm 16 & 3 efficiant imparem

Progressionis Arithmeticę regula notãda.

Exẽplũ. 1.

Exẽplũ. 2.

numerum, ſcilicet 19, & limitum multitudo ſit 10, quorum dimidium eſt 5: ducenda ſunt 19 in 5, fient 95. Tãtum reddunt ipſi numeri diſcontinuè progreſſionales ſimul iuncti.

De geometrica progreſſione.

¶Progreſſio autem geometrica, ex imparium numerorum linea potiſſimùm colligitur. Duo enim primi numeri, ſcilicet 1 & 3, conficiunt primum quadratum, vtpote 4: Tres verò primi numeri, videlicet 1,3,5, ſecundum quadratum conſtituunt numerum, vtpote 9: Quatuor autem primi numeri, vtpote 1,3,5,7, tertium quadratum ſimul iuncti reſtituunt, nempe 16: Et ſic deinceps, vno adiuncto numero, ſuccedens quadratus numerus generatur. Præterea ſecundus & tertius impar numerus, vtpote 3 & 5, conficiunt primum cubum, videlicet 8: Tres verò ſequentes numeri, ſcilicet 7,9,11, ſecũdum efficiunt cubum, vtpote 27: Quatuor deinde ſuccedentes numeri, videlicet 13,15, 17,19, tertium cubũ reſtituunt numerum, vtpote 64. Et ſic deinceps, vno ſuperaddito numero, ſuccedens cubus reſultat numerus. Omnis porrò quadratus numerus, eſt medius proportionalis inter radicem & ſuum cubum: cuiuſmodi ſunt 8/4/2, 27/9/3, 64/16/4, & ſic de cæteris. Adde ꝙ in omni progreſſione geometrica primus numerus poſt vnitatem eſt radix, ſequens quadratus, & ſuccedens cubus. In maiorem omnium elucidationẽ, ſubſcriptas numerorum libuit addere progreſſiones: Quarum prima ſub ratione dupla, ſecũda

ſub tripla, tertia ſub quadrupla, quarta verò ſub ratione quintupla progreſſionem geometricam obſeruat.

| Progreſſio | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | dupla | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 |
| | tripla | 3 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 | 2187 |
| | quadrupla | 4 | 16 | 64 | 256 | 1024 | 4096 | 16384 |
| | quintupla | 5 | 25 | 125 | 625 | 3125 | 15725 | 78625 |

Geometricæ progreſſionis regula.

Cùm volueris autẽ numeros geometrica progreſſione porportionatos, in vnum colligere numerum: ſic facito. Multiplica maiorẽ & extremum datæ progreſſionis numerum, per numerum à quo ratio ipſius progreſſionis ſiue proportio denominatur (vtpote per binarium ſi dupla, aut ternarium ſi tripla &c.) & à producto numero tolle alterum & minorẽ extremum numerum, reliquum tandem numerum diuide per numerum vnitate minorẽ eo numero, à quo præfata ratio progreſſionis denominatur: prodibit enim tandem datorum numerorum progreſſionalium ſumma. Sub dupla itaq; ratione proportionatis numeris, ſufficit maiorem extremũ duplare numerũ, & à producto auferre minorem: fruſtra enim reliquus per vnitatẽ diuideretur, quæ eſt dimidiũ binarij, à quo dupla ratio denominatur. Sub tripla autẽ ratione progrediẽtibus numeris, idẽ extremus & maior numeris triplandus eſt: & detracto à ꝓducto minore numero, reliquus ꝑ 2 venit diuidẽdus. Et ſi quadrupla fuerit ꝓgreſſionis ratio, præfatus numerus quadruplãdus

eſt,& ſubducto numero , reliquus per 3 diui-dendus. Et conſequenter ita de cæteris.

Exẽplum regulæ.

Exẽpli gratia,in prima ſupradictarũ progreſſionũ geometricarum, quæ ſub ratione dupla proportionatur,duplabis 128, fiẽt 256:à qbus auferes 2,relinquẽtur 254. Tãta eſt ipſorũ numerorum ſumma.Item in ſecunda progreſſione, quæ ſub ratione tripla proportionatur , ſi triplaueris 2187, cõſurgent 6561:à quibus tollẽda ſunt 3,& relinquẽtur 6558,quę diuiſa per 2,reſtituunt 3279.Tanta eſt igitur eorundem progreſſionalium numerorum ſumma. Haud alienum habeto iudicium de cæteris.

## ¶De vero ſupradictarum operationum examine, Cap.10.

Qua ratione ſupradicta capita veniũt examinanda.

SI IVVET DEMVM ANTEcedẽtibus capitib⁹ traditas operationes examinare,& cõmiſſum forſitan errorem dignoſcere, id facies per mutuam reciprocã've contrariarum operationum ſubminiſtrationẽ: non autem(vt vulgares tradunt Arithmetici) per nouenariam vnitatũ ſubtractionem, quolibet elemento abſque ratione limitis ſeorſum cõſiderato : neq; per ſeptenariam, & binatim coniunctorum elemẽtorum earundem vnitatum(aut alio quouis modo factam)detractionem. Tales nanq; examinandi rationes , ſupponunt id quod quæritur , vtpote , ſingula fideliter abſoluta fuiſſe : quemadmodum ex

arithmeticis vnde pendent regulis, vel facilè colligere licet. Possunt autē ipsi numeri, per ipsius o, vel 9, aut 7 superfluam additionem, aut omissionem, transpositionémve, de industria vel ex errore cōmissam falsificari: & nihilominus eiuscemodi probandi rationes, fideles (contra rei veritatem) viderentur promittere numeros. His ergo prætermissis, & curiosis magis q̄ veris numerorū amatoribus de relictis probationibus: ad facillimas, omníq; erroris scrupulo carētes examinandi rationes fæliciter accedamus, & singula iuxta præcedentium capitum discurramus ordinem.

*Nouenariæ ac septenariæ probationis reprobatio.*

2 ❧ ADDITIO INPRIMIS PER SUBtractionem sic examinetur. Subtrahātur à numerorum addendorum summa quotlibet addendi numeri, vnico dempto: cui si residuus æqualis fuerit numerus, bene additum est: secus eueniente, malè. Collectus enim ex ipsa additione numerus, addendos comprehendere debet numeros: & per subtractionē disgregatus, singulos ordine restituere.

*Additionis examen.*

3 ❧ SUBTRACTIO, versa vice, per additionē examinanda est. Si enim addatur relictus ex subtractione numerus, ipsi numero subtrahendo: colligi debet numerus, à quo subtractio facta est. Quod si plus, aut minus ex additione resultet: perperā subtractū est. Numerus enim à quo facta est subtractio, & subtrahendum & residuum continet numerū: is igitur consurgere debet, ex additione residui cū subtrahēdo

*Vt probanda subtractio.*

numero. Eorum autem quæ nunc diximus, ſubſcriptas accipe formulas.

Mutuæ ꝓbatiõis prædictarum operationũ exempla.

| Additio. | Subtractio. |
| --- | --- |
| 3 7 5 2 1 | 5 6 4 4 5 |
| 1 8 9 2 4 | 1 8 9 2 4 |
| 5 6 4 4 5 | 3 7 5 2 1 |

Multiplicationis examen.

MVLTIPLICATIO autem per diuiſionem reſpondẽter examinabitur. Cùm enim productus ex multiplicatione numerus, toties contineat numerũ multiplicandum, quot ſunt vnitates in ipſo multiplicante: neceſſum eſt, vt idem productus numerus per multiplicantem diuiſus, reſtituat præciſè multiplicãdum, ſi debitè multiplicatio fuerit abſoluta. Vbi autem quotus numerus, à multiplicando diſcrepauerit: iteranda venit ipſa multiplicatio. 4

Vt probanda diuiſio.

DIVISIO conſequenter, officio multiplicationis verſa vice probanda eſt. Nam ſi diuiſor per quotũ numerum, aut è diuerſo multiplicetur, & producto numero reſiduum (ſi adfuerit) addatur: conſurget præciſè diuidendus numerus. Quod ſi ſecus acciderit, diuiſio perperam facta eſt: & ideò rurſum diſcurrenda. Diuiſor enim à diuidẽdo toties detractus eſt numero, quot ſunt vnitates in ipſo numero quoto. Non poteſt itaq; diuiſio fideliùs, quàm per ipſam multiplicationem, & è diuerſo comprobari. Veluti ſuccedẽtia multiplicationis & diuiſionis confirmare videntur exempla: quorum alterum alterius eſt examen. 5

| Multiplicatio. | Diuisio. |
|---|---|
| 2 0 7 | x ≠ |
| 2 3 | 4 7 8 x |
| 6 2 1 | 2 0 7 |
| 4 1 4 | ≠ 3 3 3 |
| 4 7 6 1 | ≠ ≠ |

Supradictarum probationum exempla.

6 ¶ QVADRATAE autem radicis adinuentio, per quadratam radicis multiplicationem venit examinanda. Nam si datus in primis numerus fuerit quadratus: inuenta radix in seipsam ducta, eundem quadratum (modò non erraueris) producet numerum. Velut ex subscripto numero 54756 deprehendere potes, cuius radix quadrata est 234: quę in seipsam ducta, restituit eundem numerum 54756.

Vt examinãda quadratę radicis adinuẽtio.

| Quadratæ radicis inuentio. | Probatio per radicis multiplicationem. |
|---|---|
| x ≠ | 2 3 4 |
| x \| ≠ 8 \| x | 2 3 4 |
| 5 \| 4 7 \| 5 6 | 9 3 6 |
| 2 3 4 | 7 0 2 |
| 4 4 8 | 4 6 8 |
| | 5 4 7 5 6 |

7 ¶ At si datus numerus minimè fuerit quadratus, ducẽda est nihilominus radix in seipsam, sed producto numero addendũ est residuum integrum, priùs q̃ videlicet ex illo fractio à duplata radice, vel ex ipsius radicis dimidio ab eadẽ radice denominata conficiatur: Consurget enim numerus datus, ni forsitan colligendo radicẽ ipsam peccaueris. Queadmodũ ex sequẽtibus licebit deprehendere formulis.

De radice numerorũ nõquadratorum.

Exemplũ.

In quarum prima,numeri 637 quadrata radix est 25:relictis 12,quæ vel $\frac{12}{50}$, aut $\frac{6}{25}$ dicētur. In secūda verò,ipsa radix 25 in seipsam ducta, facit 625 : quibus in tertia formula adduntur relicta 12, consurgit demū idē numerus 637.

| Quadratæ radicis inuentio. | Probatio p multiplicationē: | Et additionē residui. |
|---|---|---|
| 2 1 2 residuū | 2 5 | 6 2 5 |
| 6 \| 3 7 | 2 5 | residuum 1 2 |
| 2 5 | 1 2 5 | 6 3 7 |
| 4 | 5 0 | |
| | 6 2 5 | |

Notādum. Si autem duceretur radix integra vnà cum ipsa fractione in seipsam, iuxta doctrinam sexti capitis succedentis libri secūdi: productus numerus habundaret $\frac{36}{625}$,hoc est,numero ex ductu fractionis in seipsam procreato.

¶ CVBICAE demum radicis inuentionem, per cubicam ipsius radicis multiplicationem, consequenter examinare est operæpretium. Igitur si datus numerus fuerit cubus,radix eius cubicè multiplicata,eundem ( modò non erraueris)restituet numerum. Veluti si numeri 12167 cubicam radicem(quæ est 23)cubicè multiplicaueris, eundē numerum 12167 procreabis : quemadmodum subscriptæ indicant operationum formulæ. 8

Exemplū.

| Inuētio cubicæ radicis. | Probatio per cubicam multiplicationē. | |
|---|---|---|
| 4 2 | 2 3 | 5 2 9 |
| 1 2 \| 1 6 7 | 2 3 | 2 3 |
| 2 3 | 6 9 | 1 5 8 7 |
| 6 | 4 6 | 1 0 5 8 |
| | 5 2 9 | 1 2 1 6 7 |

9 ¶Quòd si datus numerus non fuerit cubus, tunc aliquis extracta radice relinquetur numerus. Ipsa ergo radice cubicè multiplicata, producto numero integrum ipsum addendum est residuum, ante q̃ scilicet ex illo fractio constituatur à triplata radice, vel ex tertia parte eiusdem residui ab ipsa radice denominata: resultabit enim ipse numerus datus, ni forsitan in extrahẽda radice peccaueris. Exempli gratia, numeri 12179 radix cubica est 23: relictis 12, quæ vel $\frac{12}{69}$, aut $\frac{4}{23}$ veniunt appellanda. Porrò 23 cubicè multiplicata, efficiũt 12167: quibus si addãtur relicta 12 integra, cõsurget oblatus ipse numerus 12179. Vti subscriptæ monstrant formulæ.

*De radice nõ cuborũ numerorũ.*

*Exemplũ.*

| Cubicæ radicis inuẽtio. | Probatio p multiplicatione radicis cubicã: | Et additionẽ residui. |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 4 3 2 | 2 3 | 5 2 9 |
| 1 2 \| 1 7 9 | 2 3 | 2 3 |
| 2 3 | 6 9 | 1 5 8 7 |
| 6 | 4 6 | 1 0 5 8 |
| | 5 2 9 | residuũ. 1 2 |
| | | 1 2 1 7 9 |

Si autem multiplicaretur radix ipsa cum fractione cubicè, vtpote 23 cum $\frac{6}{23}$: longè aberraret productus numerus à vera ipsius dati numeri quãtitate, velut ipse te docebit calculus.

*Notãdum.*

10 ¶RELIQVVM EST, de progressionum examine pauca subiungere. In primis itaque si progressio fuerit arithmetica, & extremi illius numeri simul iũcti parẽ fecerint numerũ,

*De arithmeticæ progressionis examine.*

minor numerus eſt 3, maximus verò 2187, & omnium ſumma 3279. Hæc igitur ſumma per 2 multiplicanda eſt, fiunt 6558: quibus addantur 3, conſurgent 6561. Hæc autem diuiſa per 3 (à quibus ratio tripla denominatur) reddunt pro quoto numero 2187, quantus videlicet eſt maximus ipſius datę progreſſionis numerus. Hæc igitur de probationibus, examinandíſve antecedentium capitum arithmeticis operationibus (quæ ſuccedentibus duobus libris, poterunt reſpondenter adcõmodari) ſint ſatis. Conſulimus tamen, nõ alio vtendum eſſe probationis examine, quàm ſingularum operationũ ſæpiùs iterato diſcurſu, cùm ipſi numeri maneant ob oculos expoſiti: demptis ad ſummũ radicibus, quę difficilioris vtcũqȝ videtur inueſtigationis.

PRIMI LIBRI
Arithmeticę practicæ
FINIS.

## LIBER SECVNDVS Arithmeticæ practicæ, De vulgatis integrorum fractionibus, eorundémve partibus quotis: Eodem Orontio Finæo authore.

### De origine, expressione, & valore, fractionum, Caput 1.

ABSOLVTA, QVA POtuimus facilitate, numerorum integrorum praxi, sub vniuersalibus antecedētis primi libri tradita capitibus: operępretiū est, vt de minutis, siue quotis eorūdem integrorum partibus (quas vulgares appellant fractiones) consequenter differamus.

Quid sit integrum.

Quicquid igitur in rerum consistit natura, vel abstractum ad continuam, discretámve refertur quantitatem, & ab vnitate denominatur: nomen siue rationem adipiscitur integri. Omne porrò integrum, in tot partes inuicē ęquales descendendo diuiditur, quot sunt numeri ab vnitate sursum ascēdendo: vtpote in duas,

Integri diuisio.

quarum quælibet vna secunda, vel dimidia pars ipsius vocatur integri: aut in tres, & quælibet vna tertia eiusdem integri dicitur. Et deinceps in quartas, quintas, sextas, septimas, & succedētes quotas partes, à reliqs numeris denominatas, quantumlibet progrediendo distribuitur. Quasquidem partes quotas, vulgares ob id solēt appellare fractiones, ꝙ magis vulgatæ sint, vel ipsis vulgarium rerum supputationibus familiares. Est igitur fractio, partis aut partiū integri, iuxta numerum datum assignata distributio, siue repræsentatio.

Fractionis diffinitio.

2 ¶Ad ipsarum autem fractionum expressionē, duo cōcurrunt numeri: vtpote, numerator talium partium indicans multitudinem, & denominator qualitatis earundem partium exprimens nomenclaturā. Numerator supra denominatorem, interposita virgula, semper collocatur: & vterq; per rectum (sed in primis numerator) exprimitur. Vtpote, si volueris repræsentare duo integri tertia, facies in hunc modum $\frac{2}{3}$: tria verò quarta, sic $\frac{3}{4}$. Et si hanc volueris exprimere fractionem $\frac{5}{7}$: dices illā repræsentare quinq; integri septima. Tales itaq; fractiones, ad ipsum integrum immediatè referuntur: & principales, simplicésque nuncupātur, vnico propterea numeratore atq; denominatore contentæ.

Quibus numeris exprimantur fractiones.

Exemplū.

Fractiones simplices.

3 ¶Nam si aliqua prædictarum partium, vtpote $\frac{1}{2}$, vel $\frac{1}{3}$, aut $\frac{1}{4}$, rationē subeat integri, & in similes (vt ipsum integrum) subdiuidatur

De secundarijs, seu mixtis fractionibus.

fractiones: hæ secundariæ, siue mixtæ, fractiones
nésve fractionũ veniunt appellandæ. In quarum expressione, duo concurrunt numeratores atque denominatores, quorũ priores per rectũ, posteriores verò per obliquũ (instar integri) veniunt exprimẽdi: idcirco nulla inter posteriorem numeratorem, & denominatorẽ ponitur virgula. Exẽpli gratia, duo tertia vnius quarti integri hoc modo repræsentantur, $\frac{2}{3}\,\frac{1}{4}$: & tria quarta vnius secũdi sic, $\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}$. Quæ igitur per obliquum exprimitur, ad ipsum immediatè refertur integrum. Tales porrò fractiones, veluti pestes Arithmeticæ, fugiendæ sunt: & si quas inuitus offenderis, eas ad simplicem reuocabis fractionem, & simplicem ipsam (si id patiatur) ad integra, quemadmodũ infra demonstrabitur. Reliquum est, vt de valore fractionum iudicare doceamus.

Exemplũ.

Fractiones mixtæ fugiendæ.

De valore fractionũ. Regula 1.

¶ Simplicium itaque fractionum valorem, his depræhendes regulis. In primis, quoties numerator denominatori fuerit æqualis, talis fractio vnũ præcisè valet integrum: Cuiusmodi sunt $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$, &c. At si numerator, denominatore sit maior, huiuscemodi fractio tot valet integra, quoties numerator integrũ denominatorem compræhendit: atque tot insuper eiusdem nominis partes, quot in ipso numeratore habundauerint vnitates, denominatorem integrare minimè valentes. Velut hæc fractio $\frac{4}{3}$, vnum continet integrum, ac vnum præterea integri tertium: hæc autẽ $\frac{9}{4}$, 4

Regula 2.

duo integra, & vnū integri quartū. Cùm autē numerator minor fuerit denominatore, talis fractio nunquam facit integrū: sed tot solum modò integri partes, quot in ipso numeratore sunt vnitates. Vt $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, hoc est, duo tertia, tria quarta, quatuor quinta, &c. Solis er go fractionibus, quæ minores sunt integro (si fractiones ipsæ prorsus euitari non possint) vtendū esse velim nō ignores: cęterę enim, ad integra quoad fieri potest reuocādę sunt. De fractione demum, quæ alterius fractionis est fractio (ad quam, velut ad suum referenda est integrū) idem prorsus respōdenter iudicabis.

Tertia regula.

5 ¶Quæ demum inter supradictas, & inuicem comparatas fractiones sint æquales, maiores, aut minores: ex subscriptis rursum poteris elicire regulis. Omnes in primis fractiones, quæ similē inter numeratores & suos denominato res videntur obseruare rationē: potestate sunt æquales, hoc est, eandem integri partem (sed aliter expressam) repræsentantes. Veluti sunt $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, in quibus rationem duplā: vel $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{10}{15}$, in quibus sesqualterā: aut $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{5}{15}$, in quibus triplam denominatores ad numeratores simul obseruant rationem. Quælibet enim primarū fractionū, vnum integri dimidium: sequētium verò, duo tertia: & succedentium, vnum solummodò ter tium eiusdem integri repræsentat. Inter fractiones autem, quæ eundem habuerint nume ratorem, denominatores verò diuersos: quæ à

De fractionū æqualitate & inæqualitate.

Regula 1.

Secunda regula.

minori denominantur numero, cæteris sunt maiores. Quòd si numeratores fuerint diuersi, sed idem versauice denominator: quæ per maiorem exprimentur numeratorem, maiores erunt reliquis. Harum enim (verbi gratia) fractionem, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, prima est maior secūda, & secunda tertia, atque tertia ipsa quarta maior: Idem indicabis de his $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, & similibus quibuscunque fractionibus. Quæ demū diuersos habent numeratores atq; denominatores, sunt de necessitate inuicem inæquales: vt $\frac{2}{3}$, & $\frac{4}{5}$. Datis porrò duabus fractionibus inæqualibus, si volueris agnoscere quænam illarum sit potestate maior, duc numeratorē vnius in denominatorē alterius: nā ea cuius numerator maiorem procreauerit numerum, maior erit reliqua. Proponātur in exemplum, pręfata $\frac{2}{3}$, & $\frac{4}{5}$. duc igitur 2 in 5, fient 10: & 4 in 3, consurgent 12. Concludes igitur $\frac{4}{5}$ maiorem integri partem continere, q̄ ipsa $\frac{2}{3}$: quoniā 12, sunt maiora 10. Idē habeto indiciū de cęteris.

Tertia regula.

$$\begin{matrix} 10 & & 12 \\ \frac{2}{3} & \times & \frac{4}{5} \end{matrix}$$

## De reductione prædictarū fractionum, Cap. 2.

Fractionū reductio, cur cæteris anteponāda capitibus.

REDVCTIO, TOTIVS NEgotiationis vulgarium fractionum videtur esse fundamētum: vtpote, sine qua cæteræ fractionum operationes, commodè tractari non possunt. Semper enim fractionū fugienda est multitudo: quod absque reductione, fieri non

facilè poteſt. Reducere igitur eſt, integra in liberam fractionem, vel è diuerſo: datámve fractionem, in alterius denominationem conuertere: pluréſve fractiones, in vnam reuocare fractionem. Vniuerſum itaq; reductionis artificium, quinq; generalibus regulis perſtringemus: quarum duę primæ, reductionem integrorum ad fractionem ſimplicem, aut è diuerſo, iuxta ſexti capitis antecedẽtis libri primi traditionem, paucis abſoluere docebunt.

*Reductionis diffinitio.*

1 ¶Cùm igitur datum integrorum numerũ, ad liberã volueris reducere fractionẽ, duc ipſum integrorum numerum, in propoſitæ fractionis denominatorẽ: productus enim numerus, quęſitum numeratorẽ oſtendet, ſuper ipſum denominatorem propoſitum (interiecta de more virgula) collocandum. Proponantur exempli cauſa 4 integra, ad ſeptima reducẽda. Ducantur ergo 4 in 7, fient 28 locanda ſupra 7, in hunc modum $\frac{28}{7}$: Concludes itaq;, 4 integra reduci ad $\frac{28}{7}$. Eodem modo, 15 integra ad $\frac{165}{11}$ reducẽtur: vndecies enim 15, efficiunt 165.

*Prima regula, de integrorũ reductiõe ad fractionem ſimplicẽ.*

*Exemplũ.*

2 ¶Si autẽ è diuerſo, ſimplicem aliquã fractionem, cuius videlicet numerator maior eſt denominatore (nã de talibus ſolùm intelligitur reductio) ad integra reducere fuerit operæpretium, diuidatur numerator, per ipſius fractionis denominatorẽ: numerus enim quotus, indicabit quot integra in ipſa fractione continentur. At ſi aliquid ex diuiſione relinquatur: id erit fractio minor integro, à reducenda

*Secũda regula, de reuocãda fractione ſimplici ad integra.*

Exemplū. fractione denominata. Sint in exemplum $\frac{28}{7}$, ad integra reducenda. Diuidãtur ergo 28 per 7, fient pro quoto numero 4: pronunciabis igitur, $\frac{28}{7}$ ad 4 integra reuocari. Quòd si $\frac{29}{4}$, ad integra reducenda proponantur: diuides 29 per 4, prodibunt 7 integra, relicto $\frac{1}{4}$, hoc est, vnius integri quarto.

Tertia regula, vt simplex fractio in aliã simplicẽ cõuertatur.

¶ Tertiò, si fractionem simplicem, in aliam itidem simplicem libuerit conuertere fractionem: animaduertes in primis, non omnem fractionem in aliam quãuis indifferenter esse reducibilem, sed potentia grossiores in subtiliores, & in eam solũmodò denominationẽ, cuius ipsius fractionis denominator est pars quota. Reduces itaq; facilè secunda in quarta, sexta, octaua, decima, vel duadecima: similiter & tertia in sexta, nona, duodecima, vel quindecima, &c. Cùm autem denominatores, solam habuerint vnitatem partem communem: nunq̃ vertes vnã fractionem in alteram, absq; relicta fractione fractionis, quæ modis omnibus fugienda est. Vtpote, tertia in quarta, vel quarta in quinta, aut quinta in sexta vel septima, nõ possunt absq; fractione fractionis reuocari: idcirco tales reductiones, prorsus euitãdæ sunt. Reliquum est ostendere qualiter fractio simplex, in eam fractionẽ simplicem, ad quã reducibilis est, conuertatur. Dictum fuit primo huius libri capite, fractiones quarũ denominatores suis numeratoribus sunt proportionales, potestate esse inuicem æquales:

Tenor ac origo regulæ.

quærendus est itaq; numerator, ad quem denominator propositus eandem habeat rationem, quã reducendæ fractionis denominator ad suum denominatorem. Id autem absoluetur iuxta tenorem regulæ quatuor proportionalium (quã infra trademus) ducendo propositum denominatorẽ in numeratorẽ reducendæ fractionis, & productum numerum per ipsius fractionis denominatotẽ diuidendo: procreabitur enim reductæ fractionis numerator, supra denominatorẽ propositũ de more collocandus. Esto propositũ in exemplnm, vertere $\frac{2}{3}$ ad sexta. ducantur ergo 6 in 2, fient 12: quæ diuisa per 3, dant pro quoto numero 4, scribenda super 6, in hunc modũ $\frac{4}{6}$. Concludes igitur, $\frac{2}{3}$ verti in $\frac{4}{6}$, quæ tantam integri partem representant. Haud dissimiliter, $\frac{3}{4}$ reducetur in $\frac{9}{12}$: ter enim 12 efficiunt 36, quæ diuisa per 4 reddunt 9. Exemplũ.

¶ Poteris & alia via, talium fractionum absoluere reductionẽ. Vide quotã partem efficiat minor denominator ipsius maioris, diuidẽdo eundem maiorem per minorem: & per numerum quotum, multiplica tam numeratorem, q̃ denominatorẽ eiusdem reducẽdæ fractionis. Eo nanq; modo, reducendam & à minori numero denominatã, in rationẽ maioris & multiplicis denominatoris vel facilè conuertes. Resumantur exempli gratia $\frac{2}{3}$, ad sexta reducenda. Cùm igitur 3 minor denominator, bis contineatur in maiori, vtpote senario- Alia eiusdẽ regulæ praxis notãda. Exemplũ.

multiplicabis 2 per 2, fient 4: & rursum 3 per 2, fient 6 scribenda sub 4, in hunc modũ $\frac{4}{6}$. Hac igitur via, $\frac{2}{3}$ vertuntur ad $\frac{4}{6}$. Similiter & ipsa $\frac{3}{4}$, ad 9 duodecima. Cũ enim 4, in 12 ter cõtineantur: si ducantur 3 in 3, fient 9: & 4 per eadem 3 multiplicata, reddunt 12: scribẽda sub 9, vt hic $\frac{9}{12}$. Est igitur hic reducẽdi modus perfacilis, & summopere notãdus.

Quarta regula, de mixtarum fractionũ reductione ad fractionem simplicem.

¶Sequitur reductio fractionis mixtæ (quæ alterius fractionis est fractio) ad contingentem fractionem simplicem: quæ in hunc modum absoluenda est. Multiplicentur numeratores adinuicem, & reductæ fractionis procreabitur numerator: Idem fiat de ipsis denominatoribus, & ipsius reductę fractionis denominator resultabit, sub ipso numeratore collocandus. Si plures autẽ duobus fuerint in data fractione numeratores & denominatores, primus ducendus est in secundum, & productus numerus in sequentem tertium, & sic deinceps, pro contingente numeratorũ & denominatorum multitudine. Sint verbi gratia $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$, ad simplicem reuocanda fractionẽ. Multiplicentur ergo 2 per 1, fient 2 pro reductæ fractionis numeratore: deinde 3 in 4, fient 12 sub ipso binario pro denominatore reponenda, in hunc modum $\frac{2}{12}$. Ergo $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$ reducuntur ad $\frac{2}{12}$ integri, quæ breuiùs per $\frac{1}{6}$ reprẹsentãtur. Proponantur rursum $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{6}$, ad simplicem reducenda fractionẽ. Ducantur ergo 2 in 3, fient 6, & 6 in 1, redibunt 6: tantus est numerator.

Exemplũ.

4

Deinde 3 per 4 multiplicētur, fient 12, & rursum 12 per 6, consurgent 72: tantus est denominator, sub ipso reductæ fractionis numeratore collocandus, in hunc modũ $\frac{6}{72}$. Concludes igitur $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{6}$, reduci ad $\frac{6}{72}$ integri, quæ breuiùs exprimũtur per $\frac{1}{12}$. Qualiter autẽ fractiones abbreuiẽtur, proximo dicemus capite.

5 ¶Cùm porrò duæ simplices & diuersæ denominationis fractiones, ad vnã simplicem fractionem proponentur reducendæ: in hunc facito modum. Multiplicentur in primis denominatores adinuicẽ, & cõmunis insurget denominator, illius scilicèt fractionis, ad quam ambæ fractiones datæ cõmuniter sunt reducibiles. Ducatur postmodum numerator vnius in alternis fractionis denominatorẽ, fient particulares vtriusq; fractionis numeratores: quos si in vnum cõposueris numerũ, consurget cõmunis ipsius reductæ fractionis numerator, super ipsum denominatorem solito more collocandus. Exempli gratia, proponãtur $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$, ad vnã simplicẽ reducenda fractionem. Ducantur igitur 3 in 5, fient 15: prędictæ ergo fractiones $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$, vertẽtur ad integri quindecima. Ducantur consequenter 2 in 5, fient 10: & 4 in 3, fient 12. quæ simul iuncta conficiunt 22, scribẽda super 15, in hunc modũ $\frac{22}{15}$. Concludes igitur, $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$ reduci ad $\frac{22}{15}$ integri: quorũ 10 fiunt ex $\frac{2}{3}$, reliqua verò 12 ex $\frac{4}{5}$. Ipsa porrò $\frac{22}{15}$, per secundam regulam ad 1 integrum, & $\frac{7}{15}$ integri tandem reuocãda sunt.

Quinta regula, de reducendis duabus fractionib⁹ ad vnã fractionẽ simplicem.

Exemplũ.

Haud diſſimili via, $\frac{3}{4}$ & $\frac{5}{7}$ vertentur in $\frac{41}{28}$: quæ per eandem ſecundam regulam, ad 1 integrum,& $\frac{13}{28}$ integri reducentur.

| 22 | | 41 |
|---|---|---|
| 10 — 12 | | 21 — 20 |
| $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} . \frac{22}{15}$ vel $1\frac{7}{15}$ | | $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} . \frac{41}{28}$ vel $1\frac{13}{28}$ |
| 15 | | 28 |

Sexta regula, vt plures q̃ duæ fract. ad vnam reuocentur ſimplicem.

¶Quòd ſi plures duabus atque diſſimiles fractiones,ad vnam cõmunem & ſimplicem fractionem proponãtur reducẽdæ:talis reductio adminiculo proximæ regulæ,in hunc modum abſoluenda eſt.Reducãtur in primis duæ primæ fractiones ad vnã fractionem ſimplicem, vti proxima docuimus regula:& inde collecta fractio, cum ſequenti tertia, ad vnam pariter ſimplicem fractionem : atq; inde conſurgens fractio, vnà cum ſuccedenti quarta,ad vnam rurſum fractionem ſimplicẽ reducatur : & ſic deinceps,pro datarum fractionum multitudine.Nec refert,quam datarum fractionum primam,aut ſecundam, ſeu tertiam feceris. Hac igitur arte, fractio colligetur , quæ datas fractiones poteſtate repræſentabit. Offerantur exempli cauſa, $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ ad vnam ſimplicem reuocanda fractionem.In primis ergo,per antecedẽtis quintæ regulæ traditionẽ, $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{3}$ vertuntur ad $\frac{7}{6}$ . Ipſa porrò $\frac{7}{6}$ cum $\frac{3}{4}$ ,efficiunt $\frac{46}{24}$. Concludendum ergo $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ , reuocari tandem ad $\frac{46}{24}$,quę 1 valent integrum, & $\frac{22}{24}$, ſiue $\frac{11}{12}$ integri. Aut (ſi volueris) tolle priùs à $\frac{7}{6}$ integrum , relinquetur $\frac{1}{6}$: quod vnà cum $\frac{3}{4}$ , reducetur ad præfata $\frac{22}{24}$ , quæ

Exemplũ.

6

breuiùs exprimuntur per $\frac{11}{12}$. Vti ſubſcriptæ prædictarum reductionũ monſtrant formulæ.

| | | |
|---|---|---|
| 7 | 46 | 22 |
| 3   4 | 28   18 | 4   18 |
| $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ | $\frac{7}{6} \times \frac{3}{4}$. $\frac{46}{24}$ vel 1 $\frac{22}{24}$. | 1 $\frac{1}{6} \times \frac{3}{4}$ |
| 6 | 24 | 24 |

Debent igitur integra ex duarum quarũcunq; fractionum reductione conſurgentia, ab ipſis priùs detrahi fractionibus, quàm ad ſucceden tem reductionem, aut aliam quamuis operationem deueniatur.

Corollariũ de cæteris integrorũ & fractionum conmixturis, ad vnam fract. ſimplicem reducendis.

7 ¶Ex ſupradictis autem regulis facilè colligitur, qualiter integra cũ fractione ſimplici vel fractione fractionis, ſimpléxve fractio cũ fractione fractionis, aut duæ pluréſve fractiones fractionum, & reliquæ demũ tum integrorũ cum ſimplicibus aut mixtis fractionibus, tum ipſarum ſimplicium aut mixtarum fractionum combinationes: ad vnam ſimplicem reducantur fractionẽ. Reductis enim integris ad fractionem ſimplicem per primam regulam, & fractione fractionis ad ſimplicem itidem reuocata fractionem per ſecũdam: occurrentes fractiones ſimplices ad vnã fractionem ſimplicem, iuxta præcedentis quintæ aut ſextæ regulæ traditionẽ, vel facilè conuertes. Quarũ reductionũ exẽpla tradere, eſſet priùs dicta, atq; ſufficiẽter declarata, præter neceſſitatem refricare: de his ergo ſatis. Transeundum eſt conſequẽter, ad prolixarũ fractionũ abbreuiationẽ, quæ nõ infimã videtur obtinere partẽ.

## ¶ De abbreuiandis fractionibus, & partium quotarum inuentione, Cap. 3.

Numeri inuicē cōmunicantes.

TVRPE AVTEM EST IN Arithmetica, & artis plurimū impediens facilitatē: cùm reductæ fractiones per numeros inuicem cōmunicantes, hoc est, alijs partibus, q̄ sit vnitas, inuicem cōmensurabiles repræsentantur. Quoties igitur ipsæ fractiones in tales excreuerint numeros, operæpretium est illarum numeratores atq; denominatores (detractis priùs, & ad læuam positis integris) ad eos statim reuocare numeros, quos inuicē primos appellant, quorum videlicet nulla est pars quota cōmunis, præter vnitatē: tales nanque numeri sunt omnium minimi, qui eandem rationē habent cum eis. Et proinde reddunt fractiones minùs onerosas, & q̄ maximas possunt integri partes repręsentantes. Cōmodissimū ergo duximus hoc loco prædocere, qualiter eiuscemodi fractiones sint abbreuiandæ, & per eosdem numeros adinuicē primos exprimendæ: quo facilior pateat aditus, ad reliquas fractionum operationes. 1

Numeri inuicem primi.

Maximam cōmunicantiū numerorum partem quotā inuenire.

¶ Quærendus est itaq; numerus, qui vtriusq; & numeratoris & denominatoris, sit pars quota cōmunis & maxima: in hunc qui sequitur modum. Partire denominatorem ipsius oblatę fractionis, per numeratorē: etsi nihil ex diuisione relinquatur, ipse numerator quęsitus erit 2

numerus. Si autem aliquis ex diuiſione relinquatur numerus, diuide priorem diuiſorē per ipſum reſiduum numerum: Id'q; deinceps continuato, quatenus ex ipſa diuiſione nihil relinquatur. Nam huiuſcemodi diuiſor vltimus, datorũ numerorum erit pars quota maxima. Per hunc igitur numerum, ſi diuiſeris tandem numeratorem, atq; denominatorē ipſius abbreuiandæ fractionis: quotus numerus ex numeratoris diuiſione procreatus, erit numerator: ex diuiſione autem denominatoris, ipſius abbreuiatę fractionis denominator generabitur.

*Abbreuiationis fractionum regula.*

Proponatur exēpli gratia, huiuſcemodi fractio $\frac{324}{432}$, ad breuiſſimos reuocanda numeros. Diuidantur igitur 432, per 324: procreabitur tantùm 1, relictis 108. Partiantur rurſum 324, per 108: fient pro quoto numero 3, nullo ſuperabũdāte reſiduo. Ipſe igitur numerus 108, eſt is qui deſideratur. Quoti autem ex diuiſionibus procreati numeri, nullo modo curandi ſunt: ſufficit enim ad eum peruenire diuiſorē, per cuius diuiſionem nihil tandē relinquatur.

*Exemplũ primę partis.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 0 | | |
| | 1 ~~1~~ 8 | | |
| Denominator. | ~~4~~ ~~3~~ ~~2~~ | Numerator. | ~~3~~ ~~2~~ ~~4~~ |
| | 1 | | 3 |
| Numerator. | ~~3~~ ~~2~~ 4 | Reſiduum. | ~~1~~ 0 8 |

Si diuiſeris igitur 324, per 108: fiēt pro quoto numero 3, pro reducto numeratore ſumenda. Ex diuiſione autē 432, per eundē numerũ

*Secundæ partis exemplum.*

108: prouenient 4, eiſdem 3 pro denominatore ſubſcribēda, vt hic $\frac{3}{4}$. Præfata itaq; $\frac{324}{432}$ ad breuiorem non poſſunt reuocari fractionem, quàm ad $\frac{3}{4}$: nam 3 & 4 nullam habent partē quotam cōmunem, præter vnitatem. Sequuntur ipſarum diuiſionum formulæ.

| ~~3~~ ~~2~~ ~~4~~ | ~~4~~ ~~3~~ ~~2~~ | 3 numerator | |
|---|---|---|---|
| 3 | 4 | | abbreuiatus. |
| ~~1~~ ~~0~~ ~~8~~ | ~~1~~ ~~0~~ ~~8~~ | 4 denominator | |

Corollariū notādum.

Cùm igitur numerator abbreuiandæ fractionis, fuerit pars quota denominatoris: tūc oblata fractio ad quàm breuiſſimos redigetur numeros, vtpote, quoniam in locum numeratoris ſola ſubrogabitur vnitas.

Alius abbreuiendi mod⁹, facilior prçcedente.

3 ¶Poſſunt nōnunq̄ oblatæ fractiones, potiſſimū quę per numeros pariter pares, aut ſimiles cōmunicātes exprimūtur: abſq; pręfatę quotę partis maximæ & vtriq; cōmunis īquiſitione, ad breuiſſimos ſic reuocari numeros. Accipiatur vtriuſq; & numeratoris & denominatoris dimidiū, & rurſum vtriuſq; numeri dimidiū, aut tertia, vel alia pars quota, prout ſimul occurrēt diuiſibiles: ídq; toties cōtinuetur, quatenus vterq; ſimul & eodē modo nō poſſit am pliùs ſubdiuidi. Vltimi nāq; numeri, erūt mini mi ad quos oblata fractio reuocari poteſt. Ver bi gratia,

Exemplū.

ꝓpoſitæ fractionis $\frac{36}{48}$, vterq; numerus habet dimidiū, ſcilicet 18, & 24, & rurſum vterq; dimidiū, vtpote 9 & 12, quorū vterq; tertiam videtur habere partē, nempe 3 & 4,

qui numeri nõ possunt similem ampliùs obser uare diuisionem: proposita itaq; fractio $\frac{36}{48}$, in primis vertitur ad $\frac{18}{24}$, deinde ad $\frac{9}{12}$, tandem ad $\frac{3}{4}$, omnium fractionum sub eadem ratione cõsistentium breuissimam. Tantam igitur integri portionem reprę̨sentant $\frac{3}{4}$, quantam $\frac{9}{12}$, aut $\frac{18}{24}$, seu $\frac{36}{48}$: partes enim & ęquè multiplicia sunt inuicẽ proportionalia, & quæ proportionales sunt fractiones eandem integri partẽ (veluti primo dictum est capite) reprę̨sentant.

4 ¶QVANTVM AD SECVNDVM, vtpote, quot partes quotas, & à quibus numeris denominatas, oblatus habuerit numerus: succedentia documenta notentur. Omnis in primis numerus par, habet secundam siue dimidiam partem: impar verò numerus, caret partibus quotis, ab ipso numero pari denominatis. par enim numerus, quouismodo multiplicatus: parem semper efficit numerum.

De cognitiõe partiũ quotarũ datũ cuiusuis numeri. 1 documẽtum.

Cum aliquis numerus alium metitur numerũ, qui rursum alium numerum (& sic deinceps quantũlibet) metitur, qui dati numeri est pars quota: quilibet ipsorũ numerorũ, est pars quota eiusdẽ numeri dati. Exempli gratia, 3 metiuntur 9, & ipsa 9 metiuntur 27, partẽ quotã numeri 54: aio itaq; 3 & 9, quemadmodũ ipsa 27, partem efficere quotam eiusdẽ numeri 54: nempe 3 decimamoctauam, 9 autem sextam, & 27 dimidiam siue secundam. Numerus, alium metiri seu numerare dicitur numerum (si forsitã exciderit) cùm aliquoties sumptus,

2. documẽtum.

Exemplũ.

Qualiter numerus aliũ metiatur numerum.

eundem numerum integrè restituit : vt 5 ter sumpta, efficiunt 15, similiter & quinquies 3: idcirco 5 per ternarium, vel 3 per quinarium, ipsum numerum 15 metiri dicuntur.

3. documẽtum.

Item, cùm aliquis numerus est quota pars alterius numeri: quotus numerus eiúsdem numeri pars erit quota, à priori denominata numero. Exempli gratia, 5 faciunt tertiam partem numeri 15: & 3 igitur versavice quintam. ter enim 5, vel quinquies 3: restituunt 15.

Corollaria notanda.

¶Ex his, succedentia deducuntur corollaria. 5 Omnis in primis numerus carens tertia parte, caret & sexta, atque nona: & quicunque numerus habet nonam, habet versavice tertiam. Rursum quilibet numerus carens quarta, caret consequenter octaua : & qui habet octauam, habet etiam quartam, & dimidiam, velut habens quartam, ipsam quoque dimidiam partẽ obtinet. Omnis insuper numerus carens quinta parte, caret respondenter decima : & è diuerso, numerus habẽs decimam, habet etiam quintam, atq; dimidiam. Item, quicunque numerus par habet nonam, is habet & tertiam & sextam, atq; cęteras eiuscemodi quotas partes numeri paris: vt numerus 36, cuius nona est 4, tertia 12, sexta 6, quarta 9, altera seu dimidia 18, & duodecima 3. Si autem id impari acciderit numero, habebit solũmodò tertiã: vt numerus 27, cuius nona est 3, & tertia 9. Nullus itaq; numerus habet tertiã partẽ, nisi quẽ metitur 3 : aut quartam, præter eum quem

metitur 4:neq; quintã vel ſextam, niſi metia-tur à 5 vel 6:& conſequẽter in hunc modũ de ſeptima,octaua,nona,& reliquis ſuccedẽtibus partibus quotis. Quòd ſi numerus par diuida-tur per 9,& relinquantur ex diuiſione 6: talis numerus carebit nona parte, ſed habebit ter-tiam & ſextam.Porrò ſi idem par numerus di uidatur par 8, & ſuperabundent 4:huiuſmodi numerus carebit octaua parte, ſed habebit quartam, hoc eſt, partem quotam ab ipſo re-ſiduo denominatam, dummodò ipſum reſi-duum ſit pars ipſius diuiſoris,vel ex illius re-ſultans partibus. Omnis tandem numerus, quem non metitur aliquis digitorum ( exce-pta vnitate, quæ communis omnium nume-rorum eſt menſura ) non habet partem quo-tam,præter ab aliquo imparium & cõpoſito-rum numerorum denominatã,quos ſola meti-tur vnitas,& primos appellare ſolemus:cuiuſ modi ſunt 3,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41, 43,47,53,59,&c.

Regula generalis.

¶Si volueris igitur agnoſcere, an propoſitus numerus habeat partem quotã,à dato quouis numero denominatam:ſic facito. Diuide nu-merum datum, per denominatorem propoſi-tum:& ſi nihil ex diuiſione relinquatur,is ha-bebit partem quotã, à propoſito diuiſore de-nominatam: ſecus autẽ eueniente,nullam ta-lis nomenclaturæ partem obtinebit. Talis au-tem pars, ſemper eſt numerus quotus ex ip-ſa diuiſione procreatus. Exemplum habes de

Exempli. numero 54, quē offendes habere tertiā partē ſcilicet 18, aut ſextam vtpote 9: nunquàm autem quintā vel ſeptimam, vti ſubſcriptæ monſtrant diuiſionum formulæ, in maiorē omnium expreſſionem adiunctæ.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | | | 5 |
| 54 | 54 | 54 | 54 |
| 18 | 9 | 10 | 7 |
| 33 | 6 | 55 | 7 |

*De ipſarum vulgarium fractionum additione,* *Cap. 4.*

ADDITIO VVLGARIVM fractionum, altero duorū modorum abſoluēda eſt. Aut enim oblatæ & inuicem addēdæ fractiones eiuſdem ſunt denominationis, vel in eandē conuertibiles denominationem. Aut tales habent denominatores, vt vna in alterā non poſſit immediatè tranſmutari.

Prima additionis fractionum regula. In primis itaq;, ſi inuicem addendæ fractiones (vt rem ipſam acu tangamus) eiuſdem fuerint nomenclaturæ, vel in eandem facilè reducibiles denominationem: componendi tantummodò ſunt earundem fractionum numeratores adinuicem, & ſub inde reſultante numeratore, communis denominator ſubſcribēdus. 1

Primum exempli. Exempli gratia, ſint eiuſdē nominis fragmenta $\frac{3}{8}$, & $\frac{5}{8}$, atq; $\frac{7}{8}$, in vnam ſummā colligenda. Componantur igitur 3 & 5 & 7, conſurgent 15: quibus ſubſcribantur 8, reſultabūt

$\frac{35}{8}$. Tanta est propositarum fractionum inuicem additarũ summa. Sint rursum $\frac{2}{3}$ & $\frac{5}{6}$ & $\frac{7}{12}$, inuicẽ addenda. Cùm igitur tertia & sexta facilè vertantur in duodecima, propterea quòd 3 & 6, sint partes quotę ipsius duodenarij numeri: reducantur in primis $\frac{2}{3}$ ad duodecima, fient $\frac{8}{12}$: deinde $\frac{5}{6}$ itidem ad duocecima reuocẽtur, prodibunt $\frac{10}{12}$, per tertiam antecedentis secundi capitis regulam. Componantur demum ipsi numeratores, vtpote 7, 8, 10, adinuicem, consurgent 25: quibus subscribantur 12, in hunc modum $\frac{25}{12}$. Ergo $\frac{2}{3}$ & $\frac{5}{6}$ & $\frac{7}{12}$, simul iuncta, conficiunt $\frac{25}{12}$. Et quoniam nulla vtendum est fractione, quæ integrum vel integra comprehendat: reuocanda sunt igitur præfata $\frac{35}{8}$, similiter & ipsa $\frac{25}{12}$, ad integra, per secundam eiusdem secundi capitis regulam, diuidendo numeratorem per denominatorẽ. Colligetur itaq; ex $\frac{15}{8}$ vnum integrum, & $\frac{7}{8}$ integri: ex ipsis autẽ $\frac{25}{12}$, integra 2, & $\frac{1}{12}$, hoc est, vnum integri duodecimũ. Quod semel dictum volumus: ne toties iterata monitione, chartam inutiliter ampliare videamur.

*Secũdum exemplũ.*

*Notãdum.*

2 ¶ Si contingat autem, easdem fractiones inuicem addendas talibus constare vel exprimi denominatoribus, vt nulla possit in alterius denominationem absque fractione fractionis (quæ summopere fugienda est) immediatè reuocari: hæ veniunt in vnã simplicem fractionem reducendæ, per quintam aut sextam regulam ipsius antecedentis secundi capitis.

*Secũda addendarum fractionũ regula.*

Omnis nanq; fractionum additio, est earundẽ fractionum in vnam simplicem fractionẽ reductio: at non omnis reductio, additio versa vice censenda est. Offerantur exempli gratia, $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{5}$ inuicem cõponenda. Manifestum est, nullam istarũ fractionum in alicuius reliquarum denominationem posse conuerti: reducantur igitur $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{3}$ ad vnã fractionem simplicem, fient $\frac{7}{6}$, quæ 1 valent integrũ, & $\frac{1}{6}$ integri. Subducto igitur integro, reducantur consequenter $\frac{1}{6}$ & $\frac{3}{5}$, ad vnã fractionem simplicem: consurgent tandem $\frac{23}{30}$. Ergo $\frac{1}{2}$, & $\frac{2}{3}$, & $\frac{3}{5}$, simul iuncta, conficiunt 1 integrum & $\frac{23}{30}$ integri: vti subscriptæ monstrant reductionum formulæ.

| | |
|---|---|
| 7 | 23 |
| 3 4 | 5 18 |
| $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ . $\frac{7}{6}$, vel 1 & $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6} \times \frac{3}{5}$ . $\frac{23}{30}$, ergo 1 & $\frac{23}{30}$. |
| 6 | 30 |

Corollariũ de reliquis fractionũ mixturis ĩuicem addendis.

3 ¶Quoties igitur plures & diuersæ denominationis fractiones, aut fractiones fractionum quæ mixtæ nũcupãtur, tum inter sese, tũ coniunctim proponẽtur addẽdæ, vel ipsa integra cũ simplicibus aut mixtis fractionibus addere fuerit operæpretium: recurrẽdũ erit in primis ad reductionum præcepta, secundo huius libri expressa capite: deinde per alterutram antecedentium regularum, additio complenda. Nullã enim offendes in eiuscemodi fractionũ additione difficultatem, si reductionis artem sedula mente notaueris. Quoniam addere in eiuscemodi fractionibus, nihil aliud (vti nuper

diximus) esse videt, q̃ plures fractiones in vnā simplicem colligere vel reducere fractionem.

¶De *subtractione prædictarũ fractionum*, Cap. 5.

1 SVBTRACTIO AVTEM dictarum fractionum, quemadmodum & illarum additio, duabus absoluitur regulis. In primis enim, aut duæ fractiones propositæ eiusdem sunt denominationis, aut diuersæ, sed quarum altera in reliquæ denominationem reuocari potest: aut talibus exprimuntur denominatoribus, vt altera in alterius nomenclaturā reduci non facilè possit. Nam duę tantummodò, in subtractione fractiones occurrunt: & minor, semper à potentia maiore subtrahitur. quoniā æqualis ab æquali, frustra: maior autem à minore, nunquàm subducitur, veluti de integrorum dictũ est subtractione. Quæ autem æquales, aut maiores, aut minores potentia dicantur fractiones: primo huius libri capite, sufficienter declarauimus.

Subtractionis fractionum præambula.

2 ¶Cùm igitur subtrahenda & minor fractio, eiusdem fuerit nominis cum ea, à qua subtractio facienda est, siue id à principio, seu per reductionem tandem acciderit: auferēdus est numerator ipsius minoris & subtrahendæ fractionis, à solo numeratore maioris, & residuo numero alterutrius fractionis denominator subscribendus: is enim exprimet, relictam ex præfata subtractione fractionem. Dentur in

Prima subtractionis fractionū vulgarium regula.

Exempla. exemplum $\frac{2}{5}$, à $\frac{3}{5}$ ſubducenda. Detrahan-tur itaq; 2 à 3, relinquetur 1, cui ſubſcribantur 5, in hunc modum $\frac{1}{5}$: relinquetur igitur ex ipſa ſubtractione $\frac{1}{5}$. Proponantur rurſum $\frac{3}{5}$, à $\frac{7}{10}$ auferẽda. Reducãtur in primis $\frac{3}{5}$ ad decima, per tertiam regulam ſecundi capitis huius libri: fient $\frac{6}{10}$. Tollantur poſtmodum 6, à 7: relinquetur $\frac{1}{10}$. Haud diſſimiliter, ſi $\frac{5}{9}$ à $\frac{2}{3}$ proponantur auferenda, reduces in primis $\frac{2}{3}$ ad nona, fient $\frac{6}{9}$: à quibus ſi tollantur $\frac{5}{9}$, relinquetur $\frac{1}{9}$.

Secunda eiuſdẽ ſubtractionis regula.

¶Quòd ſi altera propoſitarum fractionum, nõ poſſit in alterius reduci denominationẽ: vtraq; ad vnam ſimplicem & cõmunem fractionẽ reducenda eſt, per quintam eiuſdem ſecundi capitis regulã. Deinde minor fractio à maiori fractione, hoc eſt, minoris fractionis numerator à numeratore maioris auferẽdus: reſiduo ſup vtriuſq; cõmuni denominatore collocato. 3

Exempla. Vtpote, ſi volueris ſubtrahere $\frac{2}{3}$, à $\frac{4}{5}$: reduces in primis ipſa $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$ ad vnã cõmunem & ſimplicem fractionem, vtpote, ad quindecima, ex quibus 10 fient à $\frac{2}{3}$, & reliqua 12 à $\frac{4}{5}$, velut obiecta reductionis formula monſtrat. Auferes itaque 10, à 12, more integrorũ: relinquentur 2, hoc eſt, $\frac{2}{15}$.

10 12 reſiduũ.
$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ . $\frac{2}{15}$
15

Eodem modo $\frac{4}{5}$, ſubducta ex $\frac{5}{6}$, relinquent $\frac{1}{30}$: nam ipſæ fractiones reducuntur ad trigeſima, quorum 24 fiunt à $\frac{4}{5}$, & reliqua 25 ab ipſis $\frac{5}{6}$: & 24

24 25 reſiduũ.
$\frac{4}{5} \times \frac{5}{6}$ . $\frac{1}{30}$
30

ſubducta ex 25, relinquũt 1. Cuius ſubtractio-nis, atq; reductionis, obiectã habes formulã.

4 ¶Et proinde manifeſtum eſt, ſi fractio aliqua ab integro vel integris proponatur auferẽda, vertendũ eſſe priùs integrum in fractionẽ ſimplicem, eiuſdem cum data fractione denominationis, per primam eiuſdem ſecundi capitis regulam; deinde abſoluendã eſſe ſubtractionem, vti ſupradictum eſt. Et quoniam numerator reducti integri, idem ſupponitur cũ ſubtrahendę fractionis denominatore: ſufficit ipſius fractionis numeratorẽ à proprio ſubtrahere denominatore, & reſiduum ipſi denominatori ſupraſcribere, detracta tandem vnitate ab ipſo integrorum numero. Vtpote, ſi libeat auferre $\frac{5}{7}$, à tribus integris: tollantur 5 à 7, relinquẽtur 2, quibus ſubſcribantur 7, in hunc modum $\frac{2}{7}$, & tollatur 1 ab ipſis 2 integris. Relinquentur ergo 2 integra, & $\frac{2}{7}$ integri.

Primũ, Corollariũ de ſubtractione fractionis ab integrorum numero.

Exemplũ.

5 ¶Item, ſi plures fractiones ſimplices, aut mixtæ (quæ fractionum fractiones appellantur) à pluribus ſimplicibus, aut mixtis fractionibus, vel mixtas adinuicem, integráve cum datis quibuſcunq; fractionibus, à ſolis integris, aut ſimul cũ oblatis fractionum cõmixturis, ſubtrahere fuerit operæpretium: reducenda fore prius ſingula fractionum genera, cum ipſis integris, ad vnam fractionem ſimplicem, per ipſius antecedentis ſecundi capitis regulas, tam videlicet eorum à quibus ſubtractio facienda eſt, quàm eorũ quæ proponuntur ſubtrahẽda:

Secundum corollariũ, de reliquis ĩtegrorum & fractionum commixturis inuicem ſubtrahendis.

deinde ſubtractionem ipſam, per alterutram duarum antecedẽtium regularum, fore demũ abſoluendam. Vides igitur, totum fractionum artificium, ab ipſa reductione pendere.

¶ *De earundem fractionũ multiplicatione*, Cap. 6.

MVLTIPLICATIO NON minorem videtur obtinere partẽ in fractis, q̃ in integris numeris: quæ aut inter eaſdem ſolummodò cadit fractiones, aut ſimul cũ ipſis tractatur integris. ¶ Fractiones in primis, etiam qualeſcunq; fuerint, hoc modo inter ſeſe veniunt multiplicãdæ. Ducãtur oblatarum fractionum numeratores, atq; denominatores adinuicem, tam per rectum quàm per obliquum expreſſi: & reſultantis inde fractionis numerator, atq; denominator producetur. Hanc porrò multiplicationem, ſic faciendam eſſe velim intelligas: vt primus tam numerator q̃ denominator ducatur in ſequentem, & productus numerus in ſuccedẽtem, & ſic deinceps vſq; ad vltimum. Detur primùm fractio ſimplex, per ſimplicem multiplicanda fractionem: vtpote $\frac{4}{5}$, per $\frac{2}{3}$. Ducantur igitur 4 in 2, fient 8: & 5 in 3, fient 15. Conſurgent igitur ex propoſita multiplicatione, $\frac{8}{15}$. Proponatur inſuper fractio fractionis, per fractionis itidem fractionẽ multiplicanda: verbi gratia $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$, per $\frac{3}{5}$ $\frac{1}{2}$. Ducantur ergo 2 in 1, fient 2: & rurſum 2 in 3, fient 6, quæ tandem

Regula generalis, de fractionũ inter ſeſe multiplicatione.

1

Primũ exemplum.

Secundum exemplũ.

per 1 multiplicata non augentur. Productæ itaque fractionis numerator, erit 6. Ducantur cõsequenter 3 in 4, fient 12: & rursum 12 in 5, fient 60: & ipsa demum 60 in 2, consurgent 120. Tantus est ipsius productæ fractionis denominator, sub ipso numeratore reponendus. Producẽtur ergo ex ipsa multiplicatione $\frac{6}{120}$, quæ breuiùs per $\frac{1}{20}$ repræsentantur. Eodem modo fractio simplex, per fractionẽ fractionis, aut è diuerso multiplicabitur. Vtpote, si $\frac{4}{5}$ $\frac{1}{3}$, per $\frac{3}{4}$, vel è conuerso multiplicare fuerit operæpretium: ducenda sunt in primis 4 in 1, fient 4: & rursum 4 in 3, fient 12. Tantus est productæ fractionis numerator. Ducãtur postmodum 5 in 3, fient 15: & rursum 15 in 4, cõsurgent 60, pro denominatore ipsi numeratori subscribenda. Ex ipsa ergo multiplicatione, resultabunt $\frac{12}{60}$: quæ ad breuiorem reducta fractionem, faciunt $\frac{1}{5}$. Haud alienũ habeto iudicium, de cęteris quibuscunq; tam simplicibus quàm mixtis fractionib⁹, aut datis quibusuis earundem fractionum commixturis inuicem multiplicandis.

Tertiũ exemplum.

¶In fractionum itaq; multiplicatione, producta fractio potestate minor est vtraq; & multiplicanda & multiplicante: cuius contrarium, integrorum videtur accidere multiplicationibus. Quoniam ab vnitate (quæ rationem habet integri) numeri sursum ascendendo, per continuam ipsius vnitatis multiplicationẽ in infinitum semper augentur: ab eadem verò

Notandum circa fractionũ multiplicationem.

vnitate in quotcunq; partes suprascripto modo fracta, ipsarum partium distributio continuè descẽdẽdo potestate minoratur. Hinc fit, vt quemadmodũ integra inuicem multiplicata, producunt numerũ vtroq; integrorum numero maiorem: sic in fractionum multiplicatione, fractio vtraq; minor generetur. Vt ex primo colligere licet exemplo. nam $\frac{8}{15}$ minora sunt $\frac{4}{5}$, aut $\frac{2}{3}$. Idem censeto de cæteris quibuscunque, & eodem modo productis fractionibus.

¶DEVENIENDUM EST consequenter, ad eas fractionum multiplicationes, quæ vnà cum ipsis fiunt integris: quas in quatuor differentias redigemus, & suo declarabimus ordine. In primis ergo, si data fractio per integrorum numerum proponatur multiplicanda: ducendus erit ipsius fractionis numerator, in datum integrorũ numerum, & inde producto numeratori eiusdem fractionis denominator subscribendus. At si data fractio, fuerit alterius fractionis fractio: ea primùm vertatur in fractionem simplicem, per quartam regulam antecedẽtis secundi capitis: dein absoluatur, vti nunc expressimus, ipsa multiplicatio. In hac itaq; fractionis per integra multiplicatione, solus fractionis numerator pro datorũ integrorum augetur multitudine: at non è diuerso. quot & astronomicis, hoc est, sexagenarijs probabis accidere fractionibus, siue minutis. Dentur in exẽplum $\frac{3}{7}$, per 4 integra

2

De multiplicatione fractionis p integra, regula ordine secunda.

Notãdum.

Exempla.

multiplicanda. Ducantur igitur 3 in 4, fient 12:quibus ſubſcribantur 7,conſurgent ex ipſa multiplicatione $\frac{12}{7}$, quæ ad 1 integrum,& $\frac{5}{7}$ integri tandem reuocantur. Sint rurſum $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$, per 5 integra multiplicanda. Reducantur in primis ipſa $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$ ad fractionem ſimplicem, vtpote ad $\frac{2}{6}$. deinde multiplicentur 2 per 5, fient 10 : quibus ſubſcribantur 6, reſultabunt $\frac{10}{6}$, quæ 1 valent integrum,& $\frac{2}{3}$, hoc eſt, duo integri tertia.

3 ¶Secundò,ſi data fractio, per integra cũ fractione proponatur multiplicanda : ducendus erit in primis numerator ipſius datæ fractionis, in integrorum numerum , & productum ipſi denominatori ſupraſcribendum, vti nunc expreſſimus:Deinde fractio in fractionẽ multiplicanda eſt,per primã huius capitis regulã: Tandem ambę fractiones in vnam ſimplicem reducẽdæ ſunt,aut per tertiam, aut per quintam ipſius ſecundi capitis regulam, detractis ſemper (quoties excreuerint) integris. Sint verbi gratia $\frac{2}{3}$, per 5 integra & $\frac{1}{2}$ multiplicanda. Ducantur igitur 2 in 5,fient 10,quæ $\frac{10}{3}$ dicentur: Deinde multiplicentur ipſa $\frac{2}{3}$ per $\frac{1}{2}$, fient $\frac{2}{6}$, quæ breuiùs per $\frac{1}{3}$ repræſentantur,quod vnà cum $\frac{10}{3}$ efficit $\frac{11}{3}$ : Tollãtur poſtmodũ integra ab $\frac{11}{3}$, ,relinquẽtur $\frac{2}{3}$.Ex hac itaq; multiplicatione, conſurgent 3 integra,& 2 integri tertia.

De multiplicatione fractionis, per integra cum fract. Regula 3.

Exemplũ.

4 ¶Tertiò, ſi fractio cum integris, per integra multiplicãda proponatur: ducenda ſunt priùs

De multipli.fract.cũ integris p integra. Regula 4.

integra adinuicem , per quartum caput libri primi: deinde fractio per integra multiplicā- da, per secundam huius capitis regulam: & à cōsurgēte fractione, subducēda sunt integra, & prioribus adiungenda. Exempli causa, sint 5 integra & $\frac{2}{3}$ integri, per 4 integra multi- plicanda. Ducantur in primis 5 in 4, fient 20 integra : deinde $\frac{2}{3}$ in eadem 4 integra, con- surgent $\frac{8}{3}$, à quibus 2 subtrahi possunt inte- gra, relictis $\frac{2}{3}$ . hæc autem 2 integra, vnà cũ ipsis 20 , conficiunt integra 22. Ex ipsa ergo multiplicatione, resultant integra 22, & 2 in- super integri tertia.

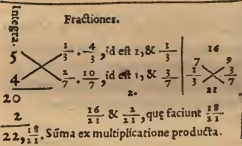
Exemplũ.

¶Quàrtò & vltimò, si fractio cũ integris per 5 integra cũ fractione occurrat multiplicāda: in hunc facito modũ. Multiplicētur in primis in- tegra p integra, iuxta quarti capitis libri pri- mi traditionem: deinde fractio multiplicāda, ducatur in integra multiplicantia, similiter & fractio multiplicans, in integra multiplicāda, per secundam huius capitis regulam : & inde generatæ fractiones (detractis priùs integris) ad vnam simplicem reducantur fractionem: Tandem altera fractionũ per reliquam mul- tiplicetur , per primam huiusce capitis regu- lam, & inde resultans fractio, per primā regu- lam antecedentis quarti capitis, priori adiun- gatur fractioni, cum qua eiusdem semper erit nominis, quę si creuerit ad integri valorē, tol- latur integrum, & prioribus addatur integris. Consurget enim demum, integrorũ vnà cum

De multi- plicatione fract. cũ inte- gris, per in- tegra cum fractiõe, re- gula 5.

fractione,aut ſine fractione numerus,ex præfata multiplicatione productus. Offerantur exempli gratia, 5 integra & $\frac{1}{3}$, per 4 integra & $\frac{2}{7}$ multiplicanda. Ducantur ergo primùm 5 integra in 4,fient integra 20: deinde $\frac{1}{3}$ in 4 integra,fient $\frac{4}{3}$, quæ 1 valent integrum,& $\frac{1}{3}$ integri: Ducantur conſequenter $\frac{2}{7}$ in 5 integra, fient $\frac{10}{7}$, quæ rurſum 1 valent integrum,& $\frac{3}{7}$ integri. Colligentur ergo 2 integra,ipſis 20 integris adiungenda: conſurgent integra 22.Reducãtur poſtmodùm $\frac{1}{3}$ & $\frac{3}{7}$, ad vnã fractionem ſimplicem, vtpote ad $\frac{16}{21}$. Tandem multiplicetur $\frac{1}{3}$ per $\frac{2}{7}$, fient $\frac{2}{21}$: quę vnà cũ $\frac{16}{21}$, conficiunt $\frac{18}{21}$. Reſultabunt itaq; ex pręaſſũpta multiplicatiõe, integra 22, vnà cum $\frac{18}{21}$: Vt hæc oſtendit formula.

Exemplũ.




6 ¶Poteris autem has quatuor fractionum cum integris,& ſimiles quaſcũq; multiplicationes, per ipſam primam & generalem abſoluere regulam: reductis priùs integris ad fractionem ſimplicem,eiuſdem cum data fractione nominis. Tunc enim numeratores erunt inter ſeſe multiplicandi, ſimiliter & denominatores: vt producta ex ipſa multiplicatione fractio conſurgat, ex qua rurſum coaleſcentia detrahere

4 antecedẽtium regularum, ad primam & vniuerſalẽ notanda reductio.

Exemplū. poteris integra. Reſumantur in exēplū præfata 5 integra cū $\frac{1}{3}$, per 4 integra & $\frac{2}{7}$ multiplicanda. Reducantur itaq; primùm 5 integra ad tertia, fient $\frac{15}{3}$: quæ vnà cum $\frac{1}{3}$, faciunt $\frac{16}{3}$. Deinde 4 integra ad ſeptima reducta, faciunt $\frac{28}{7}$: quæ vnà cum $\frac{2}{7}$, conficiunt $\frac{30}{7}$. Ducantur ergo $\frac{16}{3}$ in $\frac{30}{7}$, iuxta præfatā regulam vniuerſalem, fient $\frac{480}{21}$: quæ tandem ad integra reuocata, exhibent integra 22, relictis $\frac{18}{21}$. Haud alienum habeto indicium, de cæteris quibuſcunq; integrorum, & fractionū tam ſimplicium q̃ mixtarum oblatis, & inuicē multiplicandis ordinibus, ſiue cōmixturis.

## ¶ *De diuiſione prædictarum fractionum,* Cap. 7.

DIVISIO, QVEMADMODVM & multiplicatio, aut inter ipſas tātùm accidit fractiones, aut ſimul cum ipſis tractatur integris.

Regula generalis, de diuiſione fractionis p fractionē.

¶ Si fractio, per qualemcunq; fractionem diuidenda proponatur: hanc generalem obſeruato regulam. Ducito numeratorem ipſius diuidendæ fractionis, in denominatorē diuidentis: & productum numerum, generatę fractionis facito numeratorem. Quòd ſi denominator eiuſdem fractionis diuidendæ, in ipſius diuidentis numeratorem ducatur: conſurget ipſius procreatæ fractionis denominator, ſub præfato numeratore collocandus. 1

Notādum. Cùm igitur fractio maior, per minorem diuiditur fractionem: fractio quota demonſtrat,

quoties eadem minor in ipſa maiore & diuidenda fractione contineatur. At ſi minor, per maiorem fractionem diuidi iubeatur: producta fractio tunc indicat, quotam partem ſiue partes eadem minor ipſius maioris fractionis cōpræhendit. Dentur in exemplum $\frac{2}{3}$, per $\frac{1}{2}$ diuidenda. Ducantur ergo 2 in 2, fient 4: deinde 3 in 1, fient ſolummodò 3, ſub ipſis 4 de more notanda. Prouenient igitur ex ipſa diuiſione, $\frac{4}{3}$. Et quoniam 4 continent 3 ſemel, & 1 præterea tertium: concludes $\frac{2}{3}$ continere ſemel $\frac{1}{2}$, & 1 inſuper ipſius $\frac{1}{2}$ tertiū.

Exēplū 1.

Quòd ſi verſavice $\frac{1}{2}$, per $\frac{2}{3}$ ſupradicto modo diuitantur: fient $\frac{3}{4}$, denominatore in numeratorem, & è diuerſo tranſmutato: quæ fractio, indicabit ipſum $\frac{1}{2}$, efficere tria quarta eorundem $\frac{2}{3}$. Sint rurſum $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$, per $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{5}$ diuidenda. Duces igitur 2 in 1, fient 2: & hæc in 4, fient 8: quæ tandem multiplicata per 5, faciunt 40. Tātus eſt numerator generatę fractionis. Poſtea, duc 3 in 4, fient 12: & hęc rurſum in 3, fient 36: quæ per 1 multiplicata, non augentur. Tantus eſt denominator, ſub eiſdē 40 notandus, in hunc modum $\frac{40}{36}$. Aut (ſi velis) reduc vtranq; mixtam fractionem, ad fractionem ſimplicem: vtpote $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$ ad $\frac{2}{12}$, & ipſa $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{5}$ ad $\frac{3}{20}$, per quartam regulam ſecundi capitis huius libri. Deinde multiplica 2 per 20, fient 40: & 12 per 3, fient 36. Habes igitur vtroque modo, $\frac{40}{36}$, quæ reuocantur ad $\frac{10}{9}$: vt ſequentes monſtrant formulæ.

Exēplū 2.

$$\frac{2}{3}\ \frac{1}{4} \overset{40}{\underset{36}{\times}} \frac{3}{4}\ \frac{1}{5} \quad \Big| \quad \frac{2}{12} \overset{40}{\underset{36}{\times}} \frac{3}{20}.\ \frac{40}{36}, \text{ vel } \frac{10}{9}.$$

Et quoniam 10,continent 9 ſemel,& $\frac{1}{9}$: concludes propterea, $\frac{2}{3}\ \frac{1}{4}$ continere ſemel $\frac{3}{4}\ \frac{1}{5}$, & nonam inſuper illorum partem.Quòd ſi reſpondenter diuiſeris eadẽ $\frac{3}{4}\ \frac{1}{5}$, per ipſa $\frac{2}{3}\ \frac{1}{4}$: procreabis verſavice $\frac{36}{40}$, ſiue $\frac{9}{10}$, denotantia eadem $\frac{3}{4}\ \frac{1}{5}$, efficere $\frac{9}{10}$ ipſorum $\frac{2}{3}\ \frac{1}{4}$. Non aliter fractionem ſimplicem per fractionem fractionis,aut è diuerſo diuidere poteris: datáſve quotcunq; fractiones, per quaſcunq; volueris fractionum cõmixturas.

Notandum circa fractionũ diuiſionem.

¶Ex ipſa itaque fractionum diuiſione proueniens fractio,diuidenda ſemper eſt maior:cuius contrarium, ex integrorũ videtur accidere partitione. Cúm enim vnitas ſit veluti medium quoddam, inter numeros ex ipſius vnitatis multiplicatione creſcendo reſultãtes, & partes quotas eiuſdem vnitatis fractæ, diminuẽdo poteſtate deficientes: Fit,vt integrorũ numerus per integra diuiſus, reddat numerũ ipſi vnitati,propiorẽ quàm ſit diuidendus, & proinde minorem:Et fractio ſimiliter per fractionem diuiſa, procreet fractionem eidem vnitati quàm ſit diuidenda propiorem,& potentia conſequenter maiorem. Quanto enim partes integri, magis ab ipſo diſtant integro: tanto potentia ſunt minores,tametſi à maiori denominentur numero.

¶ CVM AVTEM integra per ſimplicem

fractionem proponentur diuidēda: sic facito. Duc fractionis denominatorē in ipsa integra, & rursum productum numerum in ipsum denominatorem : nam quotæ fractionis, ex ipsa diuisione procreatæ numeratorem habebis. Quòd si eiusdem fractionis denominatorem, per ipsum numeratorē multiplicaueris: nascetur eiusdem quotæ fractionis denominator.

De diuisione integrorū per fractionē simplicem, regula 2.

Sint gratia exēpli 5 integra, diuidenda per $\frac{3}{4}$. Duc igitur 4 in 5, fient 20: & hæc rursum in 4, consurgent 80. Tantus est procreatæ fractionis numerator. Duc postmodùm 4 in 3, fient 12. tantus est eiusdem quotæ fractionis denominator, sub ipso numeratore reponēdus. Nascentur ergo ex ipsa diuisione $\frac{80}{12}$, quę breuiùs per $\frac{20}{3}$ repræsentantur. Et quoniā 20 cōtinent 3 sexies, & $\frac{2}{3}$: concludes præfata 5 integra continere $\frac{3}{4}$ sexies, & $\frac{2}{3}$ præterea ipsorum trium quartorum.

Exemplū.

3 ¶Verùm si è diuerso, fractionem aliquam simplicem, per integra diuidere fuerit operæpretium : multiplicandus est denominator ipsius fractionis per integra, & productus numerus sub eiusdē fractionis numeratore collocādus.

De diuisione fractionis per integra, regula 3.

Proponantur in exemplum eadē $\frac{3}{4}$, per ipsa 5 integra diuidenda. Duces igitur 4 in 5, fient 20, scribenda sub 3 in hunc modum $\frac{3}{20}$. Ergo ex ipsa diuisione, procreabuntur $\frac{3}{20}$: indicantia præfata $\frac{3}{4}$, tantam partem efficere ipsorum 5 integrorum.

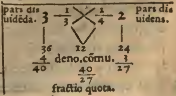
4 ¶Si autem integra cum fractione, per integra

De diuisione integrorum cum fract. p integra cum fractione, Regula 4.

itidem cũ fractione diuidenda proponantur: hanc accipe regulam, per quã reductio simul atq; diuisio absoluitur. Duc vnius fractionis denominatorem, in denominatorem alterius: & productum numerum, cõmunem facito denominatorem. Multiplica deinde ipsum communem denominatorem, per integra diuidenda: & producto adde numerum, qui ex ductu numeratoris diuidẽdæ fractionis, in denominatorem diuidentis generatur. Nã inde consurgens numerus: ipsius quotæ fractionis numerator venit appellandus, ex parte diuidenda procreatus. Ducito postmodum prefatum cõmunem denominatorẽ, in integra diuidentia: & producto adiungito numerũ, ex ductu numeratoris ipsius fractionis diuidentis, in denominatorem diuidẽdæ procreatum. Nam inde collectus numerus: pro quoto denominatore venit accipiendus, ex reductione partis diuidẽtis proueniens.

Exemplũ.

Obijciantur exempli gratia, 3 integra & $\frac{1}{3}$, per 2 integra & $\frac{1}{4}$ diuidenda. Duc itaq; 3 in 4, fient 12, quæ vocẽtur cõmunis denominator. Deinde multiplica 12 per 3 integra, fient 36: quibus adde 4, ex ductu 1 in 4 resultantia, prouenient 40. Tantus est numerator procreatæ fractionis. Duc consequẽter ipsa 12 in 2 integra, fient 24: quibus adde 3 ex ductu 1 in 3 prouenientia, resultabunt 27.



Tātus est denominator, sub præfatis 40 respondēdus. Ex hac igitur diuisione procreantur $\frac{40}{27}$, quæ valent 1 integrum & $\frac{13}{27}$. De quibus iudicabis, vt supra.

5 ¶Sed omnes istæ posteriores & similes quotcunq; regulæ, admiculo reductionis, per primam & vniuersalē regulam absolui vel facilè possunt: imò & aliæ quæcunq; cum simplicibus fractionibus, vel fractionibus fractionum inuicem diuidēdæ cōmixturę. Reductis enim priùs integris, atq; fractionum fractionibus ad fractiones simplices: cætera, iuxta tenorē ipsi⁹ primæ regulę, veniūt ad implēda. In cuius rei gratiam, proximum iterū discurrere iuuat exemplum. Sint igitur rursum 3 integra cum $\frac{1}{3}$, per 2 integra & $\frac{1}{4}$ diuidenda. Reducantur in primis 3 integra ad tertia, fient $\frac{9}{3}$: quæ vnà cum $\frac{1}{3}$, efficiunt $\frac{10}{3}$. Reducantur consequēter 2 integra ad quarta, fient $\frac{8}{4}$: quibus si addatur $\frac{1}{4}$, resultabunt $\frac{9}{4}$. Diuidātur ergo $\frac{10}{3}$ per $\frac{9}{4}$, iuxta tenorem primæ & vniuersalis regulæ: nascentur pro quota fractione $\frac{40}{27}$, quę rursum 1 integrū, & $\frac{13}{27}$ integri repręsentāt. Haud aliter facito, de quibuscunq; similibus.

*Antecedētium trium regularū, ad primam & vniuersalē notanda reuocatio.*

*Exemplū.*

### ¶De inuenienda radice quadrata, earundem fractionum uulgarium, Cap. 8.

1 RADICES AVTEM IN FRActionibus vulgaribus, semper erūt duplices. Cùm enim ad ipsarū fractionum expressionē duo concurrant numeri, vtpote numerator &

*Duplex radix in fractionib⁹ accipienda.*

denominator: vtriusq; radix quadrata, per alterutrum duorũ modorum septimi capitis libri primi, seorsum accipiẽda est. Quoniam radix numeratoris, erit numerator: & ipsius denominatoris radix, denominator quadratę radicis eiusdẽ oblatæ fractionis. Sit in primis fractio, cuius vterque numerus sit quadratus: vtpote $\frac{4}{9}$, quorum radicem iubearis habere quadratam. Radix itaq; numeratoris, est 2: ipsius verò denominatoris, 3. Scribe ergo 2 super 3, in hunc modum $\frac{2}{3}$: tanta est radix quadrata ipsorum $\frac{4}{9}$. Sit rursum fractio, cuius neque numerator neque denominator sit quadratus: vtpote $\frac{5}{11}$. Per primum itaq; modum præ allegati septimi capitis libri primi, radix numeratoris erit 2 & $\frac{1}{4}$: ipsius verò denominatoris, 3 & $\frac{1}{3}$. Vnde collecta, & veritati admodùm propinqua radix ipsorum $\frac{5}{11}$, erit $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$. Per secundum autem eiusdẽ septimi capitis modum (si præcisiorem optaueris radicem) antepositis vtrique & numeratori & denominatori tribus tziphrarum binarijs: radix numeratoris erit 2236, ipsius verò denominatoris 3316, quæ simul faciunt $\frac{2236}{3316}$. Hæc autẽ per sexagenariam fractionis rationem (vt eodem admonuimus capite) distributa: reddunt tandem pro radice numeratoris 2 integra, prima minuta 14, secunda 9, tertia verò 36, quæ non faciunt omnino 2 & $\frac{1}{4}$: pro denominatoris autem radice, 3 integra, prima minuta 18. secunda 57, tertia verò

Exemplũ in quadrata fractiõe.

Exemplũ de fractione nõ quadrata.

36, quæ non complent 3 & $\frac{1}{3}$.

2 ¶ALIVM IVVAT annectere modum inueniendarũ quadratarum radicum, in gratiam non quadratarũ fractionum principaliter excogitatum. Proposita igitur quacunque fractione, cuius quadratã iubearis inuenire radicem: mutuato quencunque volueris numerum, & illum multiplica per oblatæ fractionis denominatorem, productúmq; futuræ radicis denominatorẽ facito. Ipsum deinde mutuatum numerum ducito in seipsum, & quadratum eiusdem ducito in ipsius datę fractionis denominatorem, rursúmq; productum per numeratorem eiusdem fractionis multiplicato: consurgentis demum numeri quadratam extrahito radicem, per primam partem ipsius præallegati septimi capitis libri primi. nam ea erit numerator ipsius oblatę radicis, supra denominatorem solito more notandus. Repetantur in exemplum, præfata $\frac{4}{9}$: sítq; mutuatus numerus 60. Duc igitur 60 in 9, fient 540: tantus est futuræ radicis denominator. Duc postmodum 60 in sese, fient 3600: quæ ducta in 9, reddunt 32400: & rursum per 4 multiplicata, conficiunt 129600. Quorum radix quadrata, est 360: tantus est numerator, super eadem 540 in hunc modum collocandus $\frac{360}{540}$. Hæc autem $\frac{360}{540}$, reducuntur ad $\frac{2}{3}$: tanta est radix ipsorum $\frac{4}{9}$, quantam iuxta primũ modum nuper adinuenimus. Resumãtur iterũ, ipsa $\frac{5}{11}$: sítq; idem mutuatus numerus 60. Si

Modus inueniẽdi radicẽ quadratã, fractionib⁹ peculiaris.

Exẽplũ. 1.

Exẽplũ. 2.

duxeris ergo 60 in 11, fient 660: quę pro futuræ radicis denominatore seruabis. Ducatur postmodum quadratum ipsorum 60, hoc est, numerus 3600 in eadem 11, fient 39600: quæ rursum per 5 multiplicata, reddunt 198000. Quorum radix quadrata, est propemodũ 445: quæ super ipsa 660 pro numeratore locabis, in hunc modum $\frac{445}{660}$. Hæc autem $\frac{445}{660}$, reducuntur ad $\frac{89}{132}$, quæ valent $\frac{2}{3}$ & vnum ferè quartum vnius tertij: quantam videlicet nuper offendimus quadratã radicem ipsorũ $\frac{5}{11}$.

Corollariũ. Quanto igitur mutuatus numerus fuerit maior, tanto præcisiorem radicem non quadratarum fractionum obtinebis.

Notãdum. ¶Non aliter & iudicandum, & faciendum esse existimato, de cæteris quibuscunque fractionibus: hoc solùm adiuncto, quòd si data fractio fuerit alterius fractionis fractio, ea priùs in simplicẽ venit reducenda fractionem: Etsi fractioni cohæreant integra, ea simul cũ fractione ad vnam simplicem fractionem fore reuocanda.

## ¶De cubica præmissarum fractionũ radice, Cap. 9.

Prim⁹ modus extrahẽdi cubicã fract. radicem.

HAUD DISSIMILI VIA, datæ cuiuscunque fractionis simplicis, cubicæ sunt extrahendæ radices, altera quidem numeratoris, altera verò denominatoris ipsius oblatæ fractionis: Id'que per alterutrum modum, octauo capite libri primi declaratũ.

Quoniam radix cubica numeratoris, erit numerator: & cubica radix denominatoris, ipsius cubicæ & optatæ radicis erit denominator. quemadmodũ proximo capite, de quadratis earũdem fractionũ prædictum est radicibus.

Exẽplũ 1.

Sit in primis oblata fractio, cuius vterq; numerus sit cubus: vtpote, $\frac{8}{27}$. Radix itaq; numeratoris est 2, & ipsius denominatoris 3, quę simul faciunt $\frac{2}{3}$: tanta est cubica radix ipsorum $\frac{8}{27}$. Esto rursum fractio, cuius neuter numerus sit cubus: vtpote, $\frac{10}{29}$. Per primum itaq; modum eiusdem octaui capitis libri primi, radix numeratoris est 2 & $\frac{1}{3}$, ipsius autem denominatoris 3 & $\frac{2}{9}$, quæ simul faciunt $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{9}$: tanta est radix cubica propinqua veritati ipsorum $\frac{10}{29}$. Per secundum porrò eiusdẽ octaui capitis modum, si vtriq; & numeratori & denominatori geminos anteposueris tziphrarum ternarios, & tenorem præcepti ad vnguem obseruaueris: offendes radicem cubicam numeratoris esse 215, ipsius verò denominatoris 307, quæ simul faciunt $\frac{215}{307}$. Hæc autem per sexagenarium articulum solito more distributa, dant pro radice cuba numeratoris 2 integra, & 9 sexagesima siue minuta, quæ non faciunt omnino 2 & $\frac{1}{3}$: pro ipsius verò denominatoris radice 3 integra, & minuta 4, secunda verò 12, quæ non faciunt pręcisè 3 & $\frac{2}{9}$, per primum modum adinuenta.

Exẽplũ 2. pro nõ cubis fractionibus.

2 ¶ ALIVM, velut in quadratis, libet subiungere modum: quo tam cubicæ, q̃ non cubicæ

Alius modus valde notandus.

fractionis, radix præcisè admodũ extrahitur. Data itaq; fractione simplici, cuius radix cubica desideretur, mutuetur rursum (vt in quadratis) aliquis numerus, per quem oblatæ fractionis denominator in primis multiplicetur: nã productus numerus, erit ipsius quotę radicis denominator. Ipse postea mutuatus numerus ducatur in sese cubicè, & inde generatus cubus per ipsius datę fractionis denominatorem cubicè rursum multiplicetur, & productus tandem numerus in eiusdem fractionis numeratorem ducatur, atq; resultantis inde numeri cubica radix extrahat, per primã partẽ ipsius octaui capitis præallegati libri primi: nam ipsa erit numerator eiusdem optatæ radicis.

Exẽplũ. 1. Resumantur in exẽplũ, data nuper $\frac{8}{27}$: sitq; mutuatus numerus 6. Duc itaq; 27 in 6, fient 162: tantus erit futuræ radicis denominator. Postea ducito 6 in sese cubicè, fient 216, quæ ducta in 27, efficiunt 5832, & rursum per eadem 27 multiplicata, reddunt 157464, quæ tandẽ multiplicata per 8, cõficiunt 1259712, quorum radix cubica est 108: tantus est eiusdem radicis numerator, super ipsa 162, in hũc modum reponendus $\frac{108}{162}$. Hæc autem $\frac{108}{162}$, reducũtur ad $\frac{2}{3}$: tanta est radix cubica ipsorũ $\frac{8}{27}$, quantam videlicet per primum modum nuper offendimus.

Exẽplũ. 2. Proponantur rursum præ- 2 fata $\frac{10}{29}$: sitq; idem mutuatus numerus 6. In quem ducantur in primis 29, fient 174: tantus est futurę radicis denominator. Ducantur

postmodum 6 in sese cubicè, fient 216, quæ multiplicata per 29, efficiunt 6264, & rursum ducta in eadem 29, reddunt 181656, quæ ducta tādem in 10, conficiunt 1816560, quorum radix cubica est 122:tantus est ipsius cubicæ radicis numerator, super eadem 174 collocandus, vt hic $\frac{122}{174}$. Hæc autem $\frac{122}{174}$, reducuntur ad $\frac{61}{87}$, quæ paulo maiora sunt $\frac{2}{3}$: Radix ergo cubica veritati proxima, ipsorum $\frac{10}{29}$, est $\frac{61}{87}$.

Quanto igitur numerus mutuatus fuerit maior: tanto præcisiorem radicem cubicam, in non cubicis offendes fractionibus. Corollariū.

Porrò vbi data fractio fuerit alterius fractionis fractio, aut cum ipsa fractione data adfuerint integra: reducenda erit in primis ipsa fractio mixta, similiter & integra cum data fractione, ad vnicam fractionem simplicē. Quemadmodum in cæteris prædictarum fractionum operationibus iussimus obseruandū. Notādum.

SECVNDI LIBRI
Arithmeticæ practicæ
FINIS.

## EIVSDEM ORONTII, Liber tertius Arithmeticę practicæ: De fractis secundum Astronomos numeris, siue minutis integrorum sexagenarijs.

### ❡ *De ratione numeri sexagenarij, ac inde deductis integrorum fractionibus,* Cap. 1.

Cur numerus 60. ab Astronomis electꝰ sit.

I

NON MEDIOCREM supputationibus videtur addere facilitatē: si per commodiorum numerorum integra ipsa frangātur distributiones. Cùm igitur numerus sexagenarius, cæteris omnibus intra centenarium cōpręhensis numeris, tum partium quotarum multitudine, tum expedita multiplicandi atq; diuidendi facilitate (vt suo loco fiet manifestum) aliísq; nominibus longè præstare videatur: hunc propterea inter cęteros numeros elegerunt Astronomi, vtpote quem in frangendis illorum integris, & supputandis cælestium motuum atq; temporum reuolutionibus, præuiderunt aptissimum.

Præterea, cùm cęlorum motus ſit circularis, & circularibus congenitus orbibus: is non potuit cõmodiùs, quàm per circuli partes, in certum aliquem redigi calculum. Elegerunt itaq; circulum Solis, cæteris tum dignitate, tum neceſſitate præferendum, vtpote, ad quem reliquorum ſyderum motus referũtur: quem circulum, appellant Zodiacum, ad proprium Solis motum, ſingulo anno, 365 dies naturales & 6 ferè horas complectente, deſcriptum.

Circulariũ ſiue aſtronomicarũ fractionũ origo.

Zodiacus circulus.

2 Hunc itaque Zodiacum circulum, diuidunt in primis in 12 partes inuicem ęquales, 12 anni menſibus propemodum reſpondentes: quæ ſigna, hoc eſt, inſigniores circuli partes appellantur, ſub quibus diſcurrente Sole, hæc inferiora ſignanter mutari conſpicimus. Quodlibet inde ſignum, in 30 partes inuicem pariter æquales diuidunt, numero dierũ vnius menſis ferè reſpondentes: quæ ipſius circuli (vt dies naturales ipſius temporis) integra dicũtur, & peculiari nomine vocitantur gradus. Vnumquenq; porrò gradum, in ſexagenarias minutorum ſubdiuidunt diſtributiones. Vnde quælibet ſexageſima pars ipſius gradus, vnũ primum nuncupatur minutum: quælibet autem minuti pars ſexageſima, vnum ſecundum: & quelibet ſexageſima pars ipſius ſecundi, vnũ tertium: & deinceps hoc modo, quantumlibet vltra progrediendo. Hæ autem graduum ſiue integrorũ per ſexagenarium numerum obſeruata diſtributiones, fractiones appellantur

12 zodiaci ſigna.

Signi gradus 30.

Graduum fractiones ſexagenariæ.

astronomicæ: quarũ quæ à maiori denominantur numero potentia sunt minores, quemadmodum de vulgaribus dictũ est fractionibus.

De cæteris circulis à Zodiaco.

¶Hanc præterea signorum, graduum, atque fractionum sexagenariam partitionem: obseruant & alij quicunque circuli, ad ipsius Zodiaci & primarij circuli imitationẽ. Sed ipsius Zodiaci signa, proprias habent nomenclaturas (de quibus capite secundo, libri secũdi Sphæræ nostrę siue Cosmographiæ, abundè dictum est) cæterorum verò circulorum signa, solis exprimuntur numeris.

De tẽporũ aliarúmve rerum fractionib⁹ sexagenarijs.

3 ¶Haud dissimiliter, integra tẽporis, hoc est, dies singulos naturales, in 60 partes inuicem æquales nõnulli diuidunt Astronomi, quę dierum vocantur minuta: & minutum quodlibet, in 60 secunda: & deinceps in tertia, quarta, quinta, &c. Sed ipsi dies naturales, communiter diuiduntur in 24 horas æquales: & hora quælibet, in 60 minuta: & minutũ quodlibet, in 60 secunda: & sic consequenter, sexagenaria quantũuis continuata distributione. Idem quoque fit de horis, quæ inæquales appellantur. Adde, quòd partes linearum rectarum, in circulo subtensarum (quæ chordæ, vel sinus recti nũcupantur) hanc sexagenariã fragmentorum partitionem respondenter obseruãt: & alia quamplurima, quæ sigillatim recensere longum esset.

Recollectiones, itidem sexagenariæ.

4 ¶Quemadmodum pręterea à circuli gradibus vel integris, eiusdem circuli fractiones per

continuam diuisionẽ sexagenariam potestate decrescunt: sic ex eisdem gradibus sursum ascendendo, sexagenariæ nonnunquam obseruātur recollćtiones, tanto quidem potestate maiores, quāto plus distant ab ipsis gradibus. Ex 60 nanque gradibus, colligitur vnum signum, duo cōmunia comprehendens signa: ex 60 verò signis vnum primū, & ex 60 primis vnum secundū, & sic deinceps quantumlibet ascendendo. Haud dissimiliter in temporis partitione, ex 60 diebus vnum primum maius colligitur: & ex 60 primis vnum secundū, & sic deinceps quantumlibet, sed raro transcenditur quartū. Id autem fit, vt sub breuissimis numeris, multæ circulationes, tẽporúmne reuolutiones includantur: atque vt sexagenarij numeri supputando continuetur cōmoditas. Quemadmodum in plærisque tabulis astronomicis, cuiusmodi sunt Alphonsinæ, videmus obseruatum.

Documenta generalia in fractionū expressione seruanda.

5 ¶ AD IPSARVM autem fractionū astronomicarum expressionem deueniendo, illud in primis vniuersaliter obseruandum est: vt quæ potentia sunt maiores læuorsum, minores verò dextrorsum, congruis repræsententur elementis, & suo distribuātur ordine, vnaquaque fractionis differentia proprio insignita titulo. Et si duos, aut plures earundem fractionum simul oporteat exprimere ordines (vt in sequentibus continget operationibus) obseruetur earum quæ eiusdem sunt nominis debita

respondẽtia: sic vt signa prioribus subscribantur signis, & gradus gradibus, atque minuta minutis, & reliqua reliquis. Quòd si forsitan aliqua fractionum intermediarum species, exprimenda minus occurrerit, vtpote, minuta cum tertijs, nullis intercidentibus secundis: locus illius vnica, aut gemina tziphra venit occupandus. Adde, quòd signa cõmunia, in maiora signa colligenda sunt, & relicti gradus pauciores 60, vnà cũ occurrentibus gradibus suo loco notandi priùs, q̃ operationem aliquã per sexagenariã adgrediaris supputandi rationẽ: Finito enim calculo, ipsa maiora, hoc est, sexagenaria signa, in cõmunia (quę 30 solummodò gradibus constant) reuocare vel facilè licebit.

¶ De *fractionum astronomicarũ additione*, Cap. 2.

ADDITIONEM, ATQVE reliquas succedẽtes astronomicarum fractionũ operationes, haud dissimili via docebimus absoluere, quæ de integris libro primo tradita est: idem scilicet de singulis obseruando fractionum differentijs, quod illic de solis elementis faciendum admonuimus. ¶ Dispositis itaque addendarum fractionum ordinibus, vti proximo iussimus capite: à dextris & subtilioribus additio venit initianda, & speciatim versus læuam prosequenda, singularum fractionum vnitates, postea denas, solito more colligendo. Quoties autẽ alicuius fractionis denæ,

Additionis fract. astronomicarũ summaria regula.

1

in plures 5 resultauerint:pro quibuslibet 6 denis, vnitas proximè succedenti versus læuam ordini siue speciei venit adijciēda,& reliquus subscribendus numerus, qui nunquā excedat 59. Cùm porrò deuentū fuerit ad gradus,pro quibuslibet 30 gradibus vnum cōmune signū colligatur: vel ex 60 gradibus 1 signum maius,vbi sexagenariam operæpretium erit continuare distributionem. Etsi additione finita, collecta signa circulum exuperauerint:tollendæ sunt integræ circuli reuolutiones, quoties id fieri permittetur,ni forsitan operationis ca-, non contrarium obseruare compellat. In horarijs porrò temporum fractionibus, cùm ad ipsas peruentum fuerit horas, pro quibuslibet 24 horis,vnus dies colligēdus est, & reliquis addendus:à quibus quidem diebus, quemadmodum & rectarum linearū partibus siue integris,nihil erit detrahendum.

*Integrę circuli reuolutiones tollendę.*

2 ¶Proponantur in exemplum, tres subscripti fractionum astronomicarum ordines, à vulgaribus signis (quorū quodlibet, 30 cōplectitur gradus) vsq; ad tertia distributi: sub quibus, transuersalis designetur lineola. Et cōponantur in primis ipsa tertia, instar integrorum, fient 73: à quibus tollantur 60, relinquentur 13,sub tertiorum ordine notanda. Coaceruentur postmodū secunda, & inde resultanti numero addatur 1, pro detractis nuper 60 tertijs,consurgent secunda 93: à quibus auferantur runsum 60,relinquentur 33, scribenda sub

*Exemplū. additionis fract. astronomicarū.*

ſecundorum titulo. Ratione autẽ ipſorum 60 ſecundorum, addatur conſequenter 1 præcedentibus minutis inuicem cõpoſitis, reſultabunt minuta 132: à quibus poſſunt auferri bis 60, relictis 12. Quibus ſubſcriptis, congregentur gradus, & producto numero addantur 2, pro nuper detractis bis 60 minutis, conſurgent gradus 68: à quibus poſſunt auferri bis 30 (quæ 2 efficiunt cõmunia ſigna) relictis 8 gradibus. Subſcribantur ergo 8, & addantur 2 ipſis ſignis inuicem collectis, reſultabunt ſigna 15: à quibus ſubducantur 12, integrum efficientia circulũ, relinquentur 5. Quibus ſubſcriptis, cõſurgẽt ex præfata trium ordinum additione ſigna 5, gradus 8, minuta 12, ſecunda 32, & 13 tertia.

| Signa. | Gradus. | Minuta. | Secũda. | Tertia. |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 25 | 36 | 53 | 30 |
| 5 | 23 | 45 | 00 | 27 |
| 2 | 18 | 50 | 39 | 16 |
| 5 | 8 | 12 | 32 | 13 |

Aliud exẽplũ, de tẽporis fract. inuicẽ adde dendis.

¶In maiorem ſingulorum expreſſionem, ſubſcriptam libet addere formulam: in qua totidẽ fractionũ temporis proponuntur ordines, ab ipſis diebus (quorũ quilibet, 24 cõplectitur horas) vſq; ad tertia diſtributi. Quorũ additio in hoc ſolùm diſcrepat à ꝓxima, quoniã pro quibuſlibet 24 horis vn⁹ colligit̃ dies: & ipſi dies tandẽ 3

| Dies. | Horæ. | Minuta. | Secũda. | Tertia. |
|---|---|---|---|---|
| 27 | 19 | 50 | 56 | 28 |
| 19 | 16 | 39 | 41 | 17 |
| 15 | 20 | 00 | 43 | 9 |
| 63 | 8 | 31 | 20 | 54 |

reuocantur in menſes. Habes igitur ex hac additione propoſita, dies 63, horas 8, minuta 31, ſecnnda 20, tertia 54.

¶Quòd ſi forſitan ſigna fuerint maiora, in 60 gradus diſtributa, vel ipſi dies in 60 minuta frangantur: continuanda erit additio, pro ratione ſexagenarij numeri, vt in ipſis graduum & horarum obſeruatur fractionibus.

*Notãdum*

## ¶De Subtractione prædictarum fractionũ, Cap. 3.

SVBTRACTIO AVTEM fractionum aſtronomicarum, in hunc modum reſpondenter abſoluenda eſt. Diſponantur in primis vtriuſq; ordinis fractiones, vti proximis dictum eſt capitibus: ſic tamen, vt ſubtrahendus ordo inferiorem locum obtineat. Duo enim tantùm in ſubtractione concurrunt fractionum ordines, vtpote, is à quo facienda eſt ſubtractio, & ſubtrahendus: ſub quo, linea recta de more producenda eſt. Deinde, à minima fractionũ exordiendo differentia, ſubtrahantur ſingulæ fractiones inferiores, à ſingulis ſuperioribus & eiuſdẽ generis fractionibus, veluti capite tertio libri primi, de integrorũ dictũ eſt ſubtractione: ſubnotatis infra lineã tranſuerſalẽ reſiduis numeris.

*1 Subtractionis fractionum aſtronomicarum, regula generalis.*

2 ¶Cùm porrò denæ ſubtrahendarum fractionum, à ſuperioribus denis auferri nõ poterũt: tollantur ex 60, & reſiduum vnà cum ſurſum occurrẽtibus denis ſubſcribatur. Ratione autẽ

*Quãdo inferior fractio à ſuperiore nõ poteſt auferri.*

numeri 60, à proximè maiori fractione poten tia mutuati, iungenda est vnitas proximè maioris & subtrahendæ fractionis vnitatibus: & consurgens inde numerus, à superiori solito more tollendus. Vbi autẽ ad gradus perueneris, & signa fuerint cõmunia: tolles huiuscemodi denas inferioris numeri à 30, & residuũ cum superiore subscribes numerum, addésque signis ipsius ordinis subtrahendi vnitatem.

De gradibus signorum comunium.

At si fractiones ipsæ fuerint non circuli, sed tẽporis, & inferiores horæ à superioribus auferri non possint: hæ subducendæ sunt ex 24, & residuus horarum numerus cum suprascripto infra lineam annotãdus, addita tunc vnitate ipsis diebus subtrahendis. Item, quoties in supputationibus astronomicis, maior signorum numerus (vt plerunque fit) à minori propo netur auferendus: mutuanda erit integra reuolutio circuli, 6 maiora, vel 12 minora signa comprehendens (quæ in additione reijcitur) & facta subtrahendorũ signorum detractione, residua infra lineam sunt annotanda.

De horis dierum.

De signorũ subtractione, notãdũ.

¶Offerantur exempli gratia, 8 signa communia, gradus 21, minuta 12, secunda 25, tertia 37: auferanda à 6 signis itidem communibus, gradibus 15, minutis 4, secundis 30, & 49 tertijs. Tollantur itaque primùm 37 tertia, à 49 tertijs: relinquantur 12, directè suscribenda. Auferantur deinde 25 secunda, à 30 secundis: relinquantur 5, suo loco infra lineam designãda. Postea, quoniam 12 minuta non possunt

Exemplũ subtractionis fract. astrono.

3

auferri ex 4 minutis : tollantur igitur ex 60, relinquentur 48, quæ vnà cũ ipſis 4 efficiunt 52. Subſcribantur ergo 52 : & ratione mutuati numeri 60, adde 1 ſubtrahẽdis gradibus, fient gradus 22. qui cùm non poſſint auferri à 15: tollantur à 30, relinquentur 8, qui vnà cum ipſis 15 efficiunt 23. Subſcribantur ergo 23: & addatur 1 ſubtrahẽdis ſignis, fient 9. quæ rurſum non poſſunt auferri à 6: ſubducantur igitur ex 12, relinquentur 3, quæ vnà cum ipſis 6 efficiunt 9, ſub ſignorũ ſcribẽda titulo. Relinquentur igitur ex propoſita ſubtractione, ſigna communia 9, gradus 23, minuta 52, ſecunda 5, & 12 tertia.

| Signa. | Gradus. | Minuta. | Secũda. | Tertia. |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 15 | 4 | 30 | 49 |
| 8 | 21 | 12 | 25 | 33 |
| 9 | 23 | 52 | 5 | 12 |

Aliud exẽplum, in tẽporis fract.

¶ Examinetur in maiorem omnium fidẽ, ſuccedens fractionum temporis formula. In qua dies 67, horæ 20, minuta 39, ſecunda 36, tertia 54, auferuntur à diebus 154, horis 15, minutis 30, ſecundis 48, tertijs verò 27: & relinquunt dies 86, horas 18, minuta 51, ſecunda 11, tertia deniq; 33. Ad ſubtractionẽ itaq; horarũ 21 (nã ex minutis, reſumẽda eſt hora 1) mutuãtur horæ 24: à quibus ſubductis 21, remanẽt 3, quæ vnà cũ 15 efficiũt 18. Cætera vero à præmiſſa ſubtrahẽdi ratione nõ diſcordant.

| Dies. | Horæ. | Minuta. | Secũda. | Tertia. |
|---|---|---|---|---|
| 154 | 15 | 30 | 48 | 27 |
| 67 | 20 | 39 | 36 | 54 |
| 86 | 18 | 51 | 11 | 33 |

¶ *De earundem fractionũ multiplicatione, Cap. 4.*

MVLTIPLICATIO ATQVE diuisio in his fractionibus astronomicis, quemẽadmodum & in integris numeris, præcipuas in supputationibus vidẽtur obtinere partes: vtpote, quoniam astronomici canones, ex quatuor proportionalium regula pendentes, partim multiplicationis, partim verò diuisionis absoluuntur officio. Duo autem, in fractionum astronomicarum multiplicatione veniunt consideranda. Primum est, denominatio producti ex duarum quarumuis fractionum multiplicatione numeri: alterum est ipse diuidẽdi modus, quẽ duplici via nitemur reddere facilem. 1

Inuẽtio denominationis productarum fractionum.

¶ In expeditam primi adinuentionẽ, sequentẽ ordinanimus tabellam. In quam si lateraliter ingrediaris, hoc est, si denominatorem multiplicandæ fractionis in vertice, multiplicantis verò in læuo & extremo latere, aut è diuerso sumpseris: offendes ad communem vtriusq; angulum, ipsius productæ fractionis denominationem. Vt si libeat agnoscere, qualis fractio generetur ex ductu tertiorum in quarta, accepta quartorum denominatione ad ipsius tabellæ verticem, ipsorum verò tertiorũ denominatione in ordine læuo: offendes ad communem vtriusq; angulum 7̄, hoc est septima. Concludes igitur, tertia per quarta, aut è 2

diuerſo multiplicata, efficere ſeptima. Haud diſſimiliter, minuta ducta in ſecunda, reddere tertia: & ſic de cæteris.

¶Tabella denominationum productarum ex multiplicatione fractionum.

| Signa | gra. | mi. | ſecū. | tertia | quarta | quīta | ſexta | ſeptīa | octaua. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| grad. | g. | m | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| minu. | m | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| ſecūda | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| tertia | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| quarta | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| quinta | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| ſexta | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| ſeptima | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| octaua. | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |

¶Cùm igitur fractio, per eiuſdem, alteriúſue nominis fractionē multiplicatur: fractio producitur, ab vtriuſque denominatoribus ſimul iunctis denominata. Ex graduum autem per gradus multiplicatione, proueniunt gradus. Idem cenſeto, de rectarum linearū partibus. Cùm porrò gradus, aut partes, per fractionē aliquam multiplicantur: eiuſdem nomenclaturæ fractio producitur. Notanda.

3 ¶QVANTVM AD SECVNDVM, contingit in primis, vnā fractionem in alteram tantùm, aut plures fractionū differentias, per vnā aut plures fore multiplicandas: Et vtraq; multiplicatio duobus modis abſoluitur, mediante

ſcilicet reductione,& abſq; reductionis artifi-cio. ¶Si iuxta primã viam multiplicationem exercere libuerit, & vna tantùm fractio per aliam multiplicãda proponatur:id facies more integrorum, per doctrinã quarti capitis libri primi,coadiuuante ſexto eiuſdem libri capite, dempta producti numeri denominatione, quæ ex prima huiuſce capitis parte colligitur. Vt ſi volueris exempli gratia, multiplicare 50 minuta,per 40 ſecunda:producentur 2000, quæ tertia dicentur. nã denominator primorum minutorum eſt 1, ſecundorum verò 2:qui ſimul iuncti,conficiunt 3. Quòd ſi eadem 2000 tertia, per 60 diuiſeris: ea ad 33 ſecunda,& 20 tertia reuocabis.

Prim⁹ modus multiplicãdi vnã fract. per alteram.

Exemplũ.

¶At ſi plures, diuerſorúmq; nominũ fractiones inuicem proponantur multiplicandæ: reduces in primis vtrunq; & multiplicandum & multiplicantem fractionum ordinem, ad minimæ fractionis denominationẽ,quæ in vtroque continetur ordine: per ſexagenariam videlicet multiplicationem,iuxta ipſius ſexti capitis libri primi traditionem. Deinde multiplicabis vnũ reſultantium numerorum, in reliquum,animaduertéſque producti denominationem:ipſum autem productum ex multiplicatione numerum,per obſeruatã rurſum ſexagenariam partitionẽ,in ſuas fractionum poteris reuocare differentias. Proponantur in exemplum,minuta 15,ſecunda 20:per tertia 10, & 12 quarta multiplicãda. Duc itaq; minuta

4

De multiplicatione pluriũ fractionũ ad inuicẽ,iuxta pri.modum.

Exemplũ.

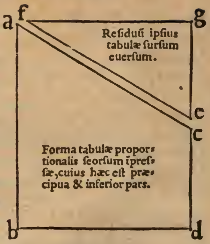
15, in 60 : fient secunda 900, quæ vnà cum 20, efficiunt 920. Ducātur similiter 10 tertia, in 60 : fient 600 quarta, hæc autem 12 quartis adiuncta, conficiunt 612. Multiplicentur ergo 920 secunda, per 612 quarta : producentur 563040 sexta, nam secunda ducta in quarta efficiunt sexta. Quòd si eadem 563040 sexta, eatenus per 60 diuiseris, quatenus relictus ex diuisione numerus sit minor 60: colliges ex proposita fractionum multiplicatione tertia 2, quarta 36, & quinta 24. sic facito de similibus.

5 ¶ALIVM PORRO multiplicādi libet describere modum, quo easdem fractiones sexagenarias absq; reductione celeriùs ferè, quàm integros poteris multiplicare numeros : per tabulam videlicet proportionalem appellatā, omnibus astronomicis supputationibus indifferenter adcommodam, quam tibi seorsum perstrinximus, & simul curauimus impressam. De cuius ratione ac vsu generali, nōnulla præfari est operæpretium. Intelligēda est tabula ipsa, veluti rectangulū quoddā triangulū, sub trapezio a b c d, & trūcato atq; sursum euerso triāgulo e f g/cōprehensa: sic enim videbatur disponenda, ne bis iterarentur numeri, & sub vnica papyri charta perstringerentur. Ipsius porrò tabulæ numeri, alij laterales, alij vero areales nuncupantur. Laterales vocātur ij, qui circa illius continentur latera : quorum duo sunt ordines principales, scilicet qui in a b/

De ratione ac vsu tabulæ proportionalis seorsum impressæ.

Numeri laterales.

Numeri areales.




describũtur late-re, & qui partim in a c/ partim vero in e f lateribus distribuuntur, nã c d/ aut e g/ lat', cõtinet infimam partẽ ipsius a b. Areales verò dicũtur numeri, qui ipsius trapezij a b c d, vel trianguli e f g / occupant aream: & ex singulorũ lateralium numerorum, ab 1 vsq; ad 60, inuicẽ facta multiplicatione producuntur. Contingit itaq;, tabulã cum duobus intrari numeris: ídq; lateraliter, aut areatim. Lateraliter intratur tabula, cùm vterq; introitualium numerorũ in ipsis lateribus, & optatus numerus in area coassumitur: Areatim verò, cũ alter prædictorũ numerorũ in altero laterum, reliquus verò in ipsa capitur area, & quęsitus numerus in reliquo latere colligitur. Per lateralẽ igitur ingressum, productum ex lateraliũ multiplicatione: per arealẽ autem, quotum ex diuisione arealis per alterũ lateralium, solemus inuestigare numerum.

Ingressus tabulæ duplex.

Qualiter vna fractio, per aliã multiplicetur.

¶Cùm igitur fractionem aliquam sexagenariam, per aliam multiplicare fuerit operæpretium, intrabis lateraliter congruam tabulæ partẽ, cũ ipsis multiplicandarum fractionum 6

numeris: offendes enim ad cõmunẽ & arealẽ angulum, productum ex ipsa multiplicatione numerũ, sed gemino distinctum ordine: quorũ dexter, illius semper est denominationis, quã inuicẽ multiplicatæ fractiones producere natæ sunt: sinistri autem quælibet vnitas, 60 repræsentat vnitates ipsius dextri, & ideò proximè maioris est denominationis ipso dextro.

Vt si proponantur exempli gratia, 15 tertia, per 10 quarta multiplicanda, intrabis lateraliter trapezium a b c d, sumptis 15 in latere a b, & 10 in latere a c: occurrent enim ad cõmunem angulũ 2/30, hoc est, 2 sexta & 30 septima. Nam tertia per quinta multiplicata, reddunt septima: quam denominationem retinet dexter numerus, sinister autem proximè maiorem. Ergo 15 tertia, per 10 quarta multiplicata, producunt 2 sexta, & 30 septima. Item si volueris multiplicare 48 secũda, per 39 tertia, intrabis rursum lateraliter triangulum e f g, sumptis 39 in latere e f, & 48 in latere e g: sese offerent enim ad cõmunẽ & arealem angulum, 31/12, quæ 31 quarta, & 12 quinta dicentur. Quoniam secunda ducta in tertia, vel è diuerso, efficiũt quinta: & ipsa quinta, sequũtur immediatè quartorum ordinem. Maiores itaque propositarũ fractionum numeri, in lateribus a b/& e g, minores verò, in a c/ & e f lateribus coassumendi sunt: vt in præfatis obseruauimus exemplis.

Exéplũ 1.

Exéplũ 2.

Notandũ.

7 ¶Quoties autem plures & diuersę fractiones,

Vt diuersę fractiones, per vnam, aut plures facilè multiplicẽtur.

per eandem, aut plures sese offerent multiplicandæ: sic facito. Disponantur in primis ipsi fractionum numeri, pro denominationum respondentia, ordine multiplicãte sub ipso multiplicando constituto, vnà cum subscripta in transuersum lineola. Postmodum à dextris & minoribus fractionibus exordiendo, quælibet fractio ordinis multiplicandi ducatur in quãlibet ordinis multiplicantis, per lateralem ingressum in congruam ipsius tabulæ partem: & collecti ad cõmunes angulos numeri, ex particularibus singularũ fractionum multiplicationibus prodeuntes (quos virgulis inuicem colligare poteris) sub propriæ denominationis reponãtur titulis, dando semper dextro & areali numero eã denominationẽ, quam oblatæ fractiones inuicẽ multiplicatæ producunt. Singulæ demum ex particularibus fractionum multiplicationibus procreatæ fractiones, sub interiecta rursum lineola, in vnum colligantur fractionũ ordinem: is enim indicabit productos ex ipsa multiplicatione fractionũ numeros. Vt igitur integrorum multiplicatio, ex ductu pendet elementorum suis limitibus distributorum: sic ipsa multiplicatio plurium fractionũ per plures fractiones, ex particulari fractionũ multiplicatione, & proprię denominationis obseruantia respondenter colligitur.

Notandũ.

Exẽplũ 1. multipli. f. act. circularium.

Sint in exemplum 27 gradus, 18 minuta, & 25 secunda, multiplicanda per gradus 10, minuta 25, & secunda 13. His vt præmonitũ est

ordinatis,ducantur in primis, per lateralē ingressum in ipsam tabulam, 25 secunda in secunda 13:fient 5 tertia, & 25 quarta,sub proprijs scribenda titulis. Ducantur consequēter 18 minuta,in ipsa 13 secunda:producētur 3 secunda,& 54 tertia. Tandem 27 gradus, per eadem 13 secunda multiplicati, conficiunt 5 minuta,& secunda 51. Secundò,ducantur rursum præfata 25 secunda,in minuta 25:producentur 10 secunda,& 25 tertia. Ducātur postmodum 18 minuta,in eadem 25 minuta: prodibunt 7 minuta, & 30 secunda. Quòd si ducantur finaliter 27 gradus,in eadem 25 minuta: prouenient gradus 11, vnà cū 15 minutis. Tertiò, ducēda sunt eadem 25 secunda,in 10 gradus:consurgent minuta 4,& secūda 10. Et 18 minuta, per ipsos 10 gradus multiplicata: reddunt 3 solum modò gradus. Si demū gradus 27, ducātur in præfatos 10 gradus : fient 4 signamaiora, vnàcū 30 gradibus. Quib⁹ omnibus debitè subscriptis, & sub

| | Sign. | gra. | mi. | secū. | ter. | quarta. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 27, | 18, | 25, | ordo multiplicādus | |
| | | 10, | 25, | 13, | ordo multiplicans. | |
| | | | | 3 | 5 — | 25 |
| Producti | | | 5 — | 51 | 54 | |
| numeri. | | | 7 | 10 — | 25 | |
| | | 11 — | 15 | 30 | | |
| | | 3 | 4 — | 10 | | |
| | 4 — | 30 | 0 | Productorū summa. | | |
| | 4, | 44, | 32, | 45, | 34, | 25. |

interposita lineola in vnū ordinem per secundum caput huius libri coaceruatis:prodibunt ex hac multiplicatione 4 signa maiora,gradus

44 (quæ in 9 ſigna cōmunia, & 14 gradus re- uocantur) minuta 32, ſecunda 45, tertia 34, & 25 quarta. Haud aliter intelligito, & facito de

Exēplū 2, de multi- pli. fractio- num recti- linearium.

cæteris. Sit rurſum in maiorem artis expreſ- ſionem, propoſitus ſinus rectus, partium 36, minutorum 39, ſecundorum 50: multiplican- dus per ſinum rectum partium 30, minutorum 22, ſecundorum 37. Ducenda eſt igitur vna- quæque ſpecies ſiue differētia ordinis multi- plicandi, in quamlibet ordinis multiplicantis, per ingreſſum lateralem in pręfatam tabulam proportionalē: & ſinguli producti numeri ſuis locis inſcribendi, & demum in vnum compo- nendi ordinem. Producentur itaque ex præ- fata ſinuum multiplicatione, 18 partes colle- ctæ ſiue maiores (quarum quælibet 60 partes cōprehē- dit) ſim- plices ve rò partes 33, minu- ta 44, ſe- cūda 12, tertia 53, & quarta 50. Si au- tem igno

| Partes collectæ. | Partes. | Miñ. | Secū. | Tertia. | Quarta. | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 36, | 39, | 50, | | | Sinus multiplicād⁹. |
| | 30, | 22, | 37, | | | Sinus multiplicans. |
| Producti numeri. | | | 24 | 30 — | 50 | |
| | | 22 — | 12 | 3 | | |
| | | 14 | 18 — | 20 | | |
| | 13 — | 12 | 18 | | | |
| | 19 | 25 — | 0 | | | |
| 18 — | 0 | 30 | | | | Productorum ſumma. |
| 18, | 33, | 44, | 12, | 53, | 50. | |

raueris quidnam vocemus ſinū rectum: con- ſule Sphęrā noſtrā, ſiue Coſmographiā, in qua paſſim ſimiles ſinuū rectorū, in canonū vſum, ſeſe offerūt multiplicationes atq; diuiſiones.

## ¶De *ipſarũ fractionũ aſtronomicarũ diuiſione. Cap. 5.*

1 IN DIVISIONE FRACTIOnum, aſtronomicarũ, velut in ipſa multiplicatione, duo veniunt cõſideranda. Primum eſt denominatio quotę fractionis ex particulari vnius per alteram diuiſione procreatæ: ſecundum autem, ipſe diuidẽdi modus, quẽ rurſum duplici via reſpõdẽter abſoluere docebimus.

*Conſiderãda in fract. aſtronomi. diuiſione.*

2 ¶In expeditam primi adinuentionẽ, ſubſcriptam ordinauimus tabellã. In quam ſi lateraliter ingrediaris, cũ vtraq; & diuidẽdæ & diuidẽtis fractionis denominatione, altera ad verticẽ tabulæ, altera verò in lęuo & extremali ordine coaſſumpta: offendes ad cõmunẽ vtriuſq; angulũ, ipſius quotæ fractionis denominatorẽ.

*Inuẽtio denominationum procreatarũ in diuiſione fractionũ.*

*¶Tabula denominationum productarum ex diuiſione fractionum.*

| | gra. | m. | ſecũ. | ter. | q̃rta | qnta | ſexta | ſeptĩa | octa |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| gra. | g | m | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| mi. | m | g | m | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| ſecũ. | 2 | m | g | m | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| tertia | 3 | 2 | m | g | m | 2 | 3 | 4 | 5 |
| quarta | 4 | 3 | 2 | m | g | m | 2 | 3 | 4 |
| quinta | 5 | 4 | 3 | 2 | m | g | m | 2 | 3 |
| ſexta | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | m | g | m | 2 |
| ſeptĩa | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | m | g | m |
| octaua | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | m | g |

Vt, ſi volueris in exemplum agnoſcere, qualis

*Exemplũ.*

fractio generetur ex diuisione quartorum per septima, accepta denominatione quartorũ ad verticem tabulæ, & septimorũ in ordine lęuo: sese offerent ad cõmunem vtriusq; angulũ 3, hoc est tertia, generatam ex proposita diuisione fractionem denominantia.

Corollaria notanda.

¶ Cùm igitur fractio per alterius speciei fractionẽ diuiditur: procreatur fractio ab eo denominata numero, qui subtracto minori denominatore à maiori relíquitur. Vt in prçassumpto exẽplo, quarta per septima diuisa, generant tertia: quoniã subductis 4 à 7, relinquuntur 3. Quòd si fractio per similẽ diuidatur fractionem, vtpote, secunda per secunda, tertia per tertia &c: fient semper gradus. Quoties autem signa per signa, vel signa cum gradibus per gradus, aut gradus ipsi per gradus diuidũtur: restituunt pariter gradus. Signa autẽ per gradus diuisa, generant minuta: & per minuta diuisa, secunda: & per secũda, tertia: & sic consequenter. Præterea, sicut integris solet accidere numeris: sic in his fractionibus, nullum ordinẽ potentia minorem, per potentia maiorem diuidere est possibile. Pendet autẽ huiuscemodi fractionũ potestas, à primo & ad læuam constituto fractionis vel integrorum numero. Quæ autem fractiones, potentia sint maiores, aut minores: primo huius libri declaratum est capite.

¶ AD SECVNDVM principale deueniendo, contingit huiuscemodi fractiones duobus 3

modis posse diuidi: vbi maximè plures,& diuersæ fuerint nomenclaturæ. In primis, per quintum caput libri primi,facta singularũ specierum,tam diuidentium, quàm diuidendarũ fractionũ reductione, ad minimã denominationem, quæ in illis continetur, non obmissa productæ fractionis denominatione, quæ ex prima huius capitis parte deprehenditur.

Prim⁹ modus diuidẽdi fract. astro.per reductionem.

Vt si volueris in exẽplũ diuidere 9 gradus, & 35 minuta,per minuta 30,& 40 secũda:vertes in primis 30 minuta, ad 1800 secunda: quæ vnà cum secundis 40, efficiunt secunda 1840. Deinde reduces 9 gradus, ad 540 minuta:quę vnà cũ 35 minutis,conficiunt minuta 575.Hæc autẽ nõ possunt diuidi per 1840: reduces igitur ipsa 575 minuta,per sexagenariam multiplicationẽ ad secũda, fient 34500. quæ diuides tandẽ per 1840 secunda: nascentur enim pro quoto numero, 18 gradus (nam fractio per similem diuisa fractionem, reddit gradus) relictis 1380 secũdis.quæ multiplicabis per 60, fient 82800 tertia,diuidenda rursum per eadem 1840 secunda:prouenient minuta 45, nam tertia diuisa per secunda, restituunt minuta.Habes igitur ex proposita diuisione,gradus 18,minuta 45. Haud aliter facito,vbi plures duabus fractionibus in vtroque fuerint ordine. ¶In his itaq; fractionũ diuisionibus, numerus quotus plærunq; maior est diuisore aut diuidendo numero:& in ipsa fractionum multiplicatione,productus numerus

Exemplũ.

Notandum circa fract. astro. diuisionem atq; multiplicationem.

vtroq; & multiplicante & multiplicando numero maior. Quemadmodũ sexto atq; septimo capite antecedentis secundi libri, de vulgatis prædictũ est fractionibus. Debent enim sexagenariæ fractiones, cum eisdem vulgaribus ex omni parte conuenire: nã minuta sunt veluti fractiones integri simplices, secunda vero, & tertia, vnà cũ reliquis, veluti fractionum fractiones, ad suas principales (veluti primariæ ad integra) referendæ.

Secundus modus diuidẽdi fractio. altro. per tabulã proportionalem.

¶DEVENIENDVM EST consequenter ad diuidendi modũ, qui fit absq; reductione, per sexagenariam videlicet & proportionalẽ tabulam: Et in primis, qualiter vna fractio, vel duæ, per vnicam diuidantur fractionem. 4

Qualiter vna vel duæ fractio. per vnam diuidãtur fractionem.

Intrabis itaq; areatim alterutrã tabulæ partẽ, prout cõmodiùs acciderit, sumpto in altero lateralium ordine, vtpote a b/ vel a c inferioris, aut e f/ vel e g/ superioris partis eiusdem tabulæ, diuidentis fractionis numero: sub quo directè progrediendo, numerum diuidendæ fractionis in eadẽ inuestigabis columna. Quẽ si prçcisum offẽderis: in alterutrius lateris extremo quotæ fractionis reperies numerũ, quæ illius erit denominationis, quam propositæ & inuicem diuidendæ fractiones procreare sunt natæ.

Notandũ.

Quoties verò sub diuidente, ipsam diuidendam nõ inueneris fractionem: accipito proximè minorem, & quotam (vti nunc dictũ est) elicito fractionem. Tolle postmodũ eandem proximè minorem fractionem, ab ipsa

diuidęnda,& differentiam rursum sub eadem diuidente animaduertito,& quotæ fractionis in altero latere secundum accipito numerum: ídq; deinceps continuato, quatenus præcisum tandem offendas numerũ. Obtenta autẽ primi numeri denominatione, reliquorum denominationes suum seruant ordinem: ídq; nedũ in ipsa diuisione, sed in cæteris fractionũ obseruatur operationibus. Pendet autẽ procreatæ fractionis denominatio, vbi duæ, vel plures fuerint in ordine diuidendo, atq; diuidente fractionum differentiæ: à læua, & potentia maiori fractionum vtriusque ordinis differentia. Præterea, cùm vnica fractio, & in dextrũ cadens numerorũ ordinem, per vnicam diuidenda proponitur: tunc diuidentis fractionis numerus cõmodiùs accipitur in latere a b/vel e g, q̃ in a c/ vel e f / latere: è diuerso autem, cùm duæ adfuerint fractiones per eandẽ fractionem diuidendæ, vel vnica tantùm, sed in læuum cadens numerorum ordinem.

*Notãdum, de quotarũ fractionum denominationibus.*

*De cõmodiore in tabulam ingressu.*

¶Dentur in primis in exemplum 56 minuta, per 14 tertia diuidenda. Sumptis igitur 14 in latere a b, offendes in quarta colũna ad dextram 56: ad verticem autem ipsius columnæ, in a c/ latere 4, quæ secũda dicentur. Concludes ergo, 56 minuta diuisa per 14 tertia, reddere pro quoto nũmero 4 secunda. Quòd si iubearis diuidere 50 minuta, per 15 tertia: acceptis rursum 15 in eodem latere a b, tibi occurrent in tertia colũna pro numero proximè

*Exẽpla diuisiõis vniꝰ fract. per vnicam.*

minori 45, & ad verticem 3, quæ rurſum di=centur ſecunda. Deinde ſubductis 45 ex 50, relinquentur 5: quæ rurſum inueſtigabis ſub ipſis 15, in a c/ latere ſumptis. offendes autem ea, in ſeptima linea ab ipſis 15, & in ordine læuo: ad ipſius verò lineæ finem, in latere ſcilicet a b/20, quę tertia veniunt appellanda. Ergo 50 minuta, diuiſa per 15 tertia: reddunt pro quoto numero 3 ſecunda, & 20 tertia.

Exẽpla diuiſiõis duarum fract. per vnicã.

¶Haud aliter, duas quaſcunq; inuicem ſuccedentes fractiones, per vnicã poteris diuidere fractionem: Vtpote, ſi diuidere oporteat 12 gradus & 30 minuta, per minuta 15. Acceptis enim 15 in latere a c/eiuſdẽ tabulę proportionalis, ſi ab ipſis 15 deorſum rectiſſimè deſcendas, offendes tãdem ipſa 12, 30: à quibus ſi ad læuam recto perrexeris tramite, occurrent tibi in latere a b/50, ex ipſa diuiſione prouenientia. hæc autẽ 50, à minutis denominãda ſunt: pendet enim ipſius quotę fractionis denominatio, ab ipſis gradibus potentia maioribus, qui per minuta diuiſi reſtituunt minuta. At ſi minuta 17, ſecunda 28, per eadẽ 15 minuta proponantur diuidenda: accipies 15 in latere a b, & in ſequẽti columna, & dextro numerorum ordine tantummodò 15, numerum videlicet diuidendo proximè minorem. Occurrentem autem ad colũnæ verticẽ colliges vnitatem, à gradibus quidem denominãdam: diuiduntur enim minuta per minuta, quæ generãt gradus. Subductis poſtmodum 15, ab ipſis 17

minutis:relinquuntur 2. Quæres igitur è dex-
tra regione eorũdẽ 15 lateris a b,ipſa 2 minuta
& 28 ſecunda.occurrent autẽ in nona colum-
na tãtummodò 2/15: & in a c/latere ad ipſius
columnæ verticẽ 9,quæ minuta dicẽtur. Sub-
ductis rurſum 2/15,ab ipſis 2,28, relinquũtur
ſecunda 13. Acceptis igitur præfatis 15 minu-
tis in latere a c,quęres ſub illis 13.quæ tãdem
reperies in læuo (in quem cadunt) numerorũ
ordine:& è recta regione ipſorũ 13,occurrent
in a b/latere 52,quæ ſecũda veniũt conſequẽ-
ter appellanda. Habes igitur ex diuiſione 17
minutorum & 28 ſecundorum,per minuta 15:
gradum 1,minuta 9,& ſecunda 52.

Vt duæ vel tres fract. p duas ſimul fractiones eiuſdem tabulæ diuidantur officio.

5 ¶Cum autem duas,tréſue ſuccedẽtes fractio-
nes, per duas ſimul fractionũ differentias di-
uidere fuerit operæpretium:id facies in hunc
modum. Accepto in a b/latere vtroque diui-
dẽtium fractionũ numero,& à quolibet dex-
tram verſus recta progrediendo via, compa-
rentur adinuicem ſingulorum numerorũ or-
dines,in eadem columna ſiue diſtantia ab ip-
ſo a b/latere,è dextra regione cuiuſlibet diui-
dentiũ occurrentes, iungendo videlicet dex-
trum & groſſiori fractioni reſpondentem nu-
merum, cum ſiniſtro numero eius ordinis qui
ſubtiliori fractionum reſpondet numero:qua-
tenus diuidendas videas integrari fractiones.
Nam capitalis eiuſdem columnæ in a c / la-
tere ſimul occurrens numerus, pro quoto ve-
nit accipiendus numero:qui illius ſemper erit

denominationis, quã fractiones potẽtia groſſiores inuicem diuiſæ procreare ſunt natæ.

Notãdum, pro numeris nõ præciſè reperibilibus.

Quòd ſi diuidendas præciſè nõ valeas confi- cere fractiones: cõpones ſaltẽ proximè minores, & quotũ rurſum de more colliges numerũ. Acceptis poſtmodũ ipſarũ diuidẽdarũ fractionũ, & earundẽ proximè minorũ differentijs: quęrãtur rurſum è regione diuidẽtiũ fractionũ numeri ſupradicto modo cõiuncti pręfatas differẽtias cõficientes, ſumatúrq; de more ſecundus numerus quotus, ad ipſius columnæ verticem, & in ipſo latere a c/ ſimul occurrens: ſimilíſque rurſum cum differentia ipſius differentiæ (ſi opus fuerit) diſcurſus iteretur.

Documẽta particularia, admodum notanda.

Verùm ſi inter fractiones diuidẽtes ſpecies aliqua intermittatur, vtpote, ſi proponantur minuta cũ tertijs vel gradus cũ ſecundis: non iunges numerum dextrum cũ ſiniſtro ſequentis, ſed vnuſquiſque ſuum ſeruet ordinem. Itẽ ſi prima ſpecies ordinis diuidendi, aut proximè minor ea, nõ poſſit inueniri è regione primæ ſpeciei ordinis diuidẽtis in a b/ latere coaſſumptæ, inter ipſa a b/ & a c/ latera: ſumes vtranq; ſpeciem diuidentem in latere a c, aut partim in ipſo latere a c, partim verò in reliqua eius parte e f, & ſub illis in eadem linea fractiones diuidendas: quotam porrò fractionem in ipſo a b/ latere, quemadmodum nuper admonuimus.

¶Haud alienum habeto iudicium, vbi plures duabus in vtroque & diuidendo & diuidente 6

ordine adfuerint fractionum ſpecies: maiore nanque ſolùm opus erit animaduertentia, & plurium numerorum habenda conſideratio. Idem enim de ſingulis propoſitarũ fractionũ ſpeciebus, adminiculo præfatæ tabulæ proportionalis facere eſt operæpretium: quod de ſingulis integrorum numerorũ elementis, capite quinto libri primi iuſſimus obſeruandũ. Quemadmodum ex ſubſcriptis deprehendere licebit exemplis.

De generali datarum quotcũque fractionũ, per datas quotcunq; fractiones diuiſione.

¶Proponantur in exemplum gradus 4, minuta 41, ſecunda 14, diuidenda per minuta 25, ſecunda 34. Cõpertis itaque 25 & 34 in latere a b, offendentur è regione ipſorum 25, in vndecima videlicet columna 4/35, & ſub his è regione 34, huiuſmodi numeri 6/14: qui ſupraſcripto modo coniuncti, efficiunt 4/41/14, diuidendarum fractionum numeratores. Ad ipſius igitur columnæ verticẽ: colliges 11 pro quota fractione, quæ minuta dicentur: gradus enim per minuta diuiſi, reſtituunt minuta.

Exẽplũ 1. diuiſionis triũ fract. per duas.

¶Eſto rurſum propoſitum diuidere gradus 6, minuta 40, ſecunda 25, per minuta 10, ſecunda 20. Sumptis itaque 10 & 20, in latere a c, offendentur ſub ipſis 10, proximè minores numeri, vtpote 6/20, & ſub ipſis 20 atque in eadem linea 12/40: quæ pręmiſſo modo coniuncta, efficiunt gradus 6, minuta 32, ſecũda 40. In eadẽ ergo linea, & in ipſo a b/latere, concurrent 38 pro primo quotæ fractionis numero, quæ minuta dicentur. Differentia autem

Secundum exemplum diuiſionis triũ fract. per duas.

ipſorum 6/40/25, ab ipſis 6/32/40, eſt minutorum 7, & ſecundorũ 45. Hæc igitur rurſum quæres ſub ipſis 10, & 20, in eodem a c/ latere coaſſumptis. offendes igitur ſub 10, hos numeros 7/30, & ſub 20 in eadẽ linea, 15/ 0: quæ ſæpiùs expreſſo more coniuncta, efficiunt præfata 7 minuta, & 45 ſecunda. Colliges igitur pro ſecunda fractione quota, concurrẽtia in a b/latere 45 ſecũda. Habes igitur ex propoſita diuiſione, minuta 38, ſecũda 45.

Exemplum generale diuiſionis pluriũ fractionũ, per plures fractionum differentias.

¶ Dentur tandem gradus 42, minuta 5, ſecunda 2, tertia 9, quarta verò 45: diuidenda per 4 gradus, 5 minuta, & 3 ſecunda. His ordine diſtributis, geminæ ſubſcribantur parallelæ, quotas ex diuiſione fractiones recepturæ: ſub quibus 4 gradus ordinis diuidendi in directũ ipſorum 42 graduum in primis collocentur, & 5 minuta ſub 5 minutis, atque 3 ſecunda ſub duobus ſecundis. Et notatis in a c/latere, ipſius diuiſoris numeris, vtpote 4 / 5 / 3: accipiantur ſub eiſdem, & in eadem linea, diuidendi fractionum numeri ipſi diuiſori ſuprapoſiti. Qui cùm præciſè non offendantur, colligendi ſunt numeri proximè minores: vtpote 0/40 ſub ipſis 4, & 0 / 50 ſub ipſis 5, atque 0/30 ſub ipſis 3. Ad quorũ regionem læuam, occurrent in a b/ latere 10 gradus, pro prima quoti numeri fractione: gradus enim diuiſi per gradus, reſtituunt gradus. Scribantur ergo 10 intra lineas parallelas, ſub ipſorum graduum ordine: & ſubductis præfatis numeris

40/50/30, ab ipſis 42 gradibus, 5 minutis, & duobus ſecūdis, ſupranotētur reliqui, vtpote gradus 1, minuta 14, & 32 ſecūda, deletis quorū facta eſt ſubtractio numeris. His abſolutis, renouentur ſinguli diuiſoris numeri, per vnicū ordinem verſus dextrā anticipati, ponēdo gradus ſub minutis, & minuta ſub ſecundis & ſic cōſequēter de cæteris: priori diuiſore deleto. Et rurſum ſub eiſdem numeris 4/5/3, in præfato latere a c/coaſſumptis, ſuprapoſiti & ex proxima diuiſione relicti inueſtigētur numeri. At quoniā ſub eiſdē 4, vnus gradus & 14 minuta præciſè nō occurrunt: ſumendi ſunt numeri proximè minores, vtpote 1/12, & in eadē linea ſub ipſis 5 & 3, ſimul occurrentes numeri, ſcilicet 1/30, & 0/54. E quorū regione læua ſeſe offerunt in a c/latere 18, quæ minuta di-

Gradus. Minuta. Secunda. Tertia. Quarta.

1 — 1 — 1 5 — 4 5
1 1 1 5
1 — 1 3 — 3 0 — 5 4
1 14 32
4 0 — 5 0 — 3 0

¶Fractiones ſub diuidētibus occurrētes, vnà cū relictis ex ſubtractionibus fractionum numeris.

42 . 5 . 2 . 9 . 45. ¶Fract. diuidēdæ.

10 . 18 . 15 . . ¶Fractiones quotæ.

4 — 5 — 3 / 3 / 3 ¶Fractiones diuidentes.
4 — 5 / 5
4 /

centur, ſcribenda poſt 10 gradus intra parallelas. Ipſi porrò numeri ſub diuiſoribus reperti,

ſæpius expreſſo more coniuncti conficiunt 1/13/30/54. quæ notanda ſunt ſuper 1 gradũ, 14 minuta, 32 ſecunda, & 9 tertia: atque ab eiſdem ſolito more ſubducenda. Relinquetur igitur 1 minutum, 1 pariter ſecundum, vnà cũ 15 tertijs, & 45 quartis. Quibus decenter ſupranotatis, & deletis prioribus numeris: renouentur iterũ dextram verſus ipſi diuiſores numeri, & ſub illis in præfato latere a c/coaſſumptis, ijdem reſidui numeri ſigillatim inueſtigentur. Sub ipſis ergo 4 occurrent 1/0, & ſub 5 in eadem linea 1/15, ſub ipſis autem tribus 0/45: quæ ſimul de more coniuncta, conficiunt præciſè ipſos nuper relictos numeros. Accipiendus eſt igitur in a b/latere ſimul occurrens numerus, vtpote 15, & intra lineas parallelas ſub titulo ſecundorum reponendus. Tandem ſupraſcriptis in hunc modum collectis numeris, & illorum à præfatis reſiduis ſigillatim facta ſubtractione: nihil prorſus relinquetur. Prouenient igitur ex præmiſſa diuiſione, gradus 10, minuta 18, & ſecunda 15.

Vt exequẽda antecedentis exẽpli diuiſio, abſq; tabula proportionali.

¶ Quòd ſi prædictarum fractionum diuidendarum ordinem, per ipſos numeros diuiſores, iuxta primũ diuidendi modũ, proximo numero tertio ſufficienter expreſſum, diuidere forſitan iuuerit: vterq; ordo ad minimã fractionis ſpeciem in primis reuocandus eſt, per continuam videlicet multiplicationem ſexagenariam, collectis ſemper in vnum eiuſdem nomenclaturæ numeris. Ordo itaq; diuidendus,

quatuor multiplicationibus & totidem additionibus, ad 545407785 quarta reducetur: diuisor autem, duabus tantum multiplicationibus & totidē additionibus, ad secunda 14703. Diuidenda sunt igitur, per doctrinā quinti capitis libri primi, ipsa 545407785 quarta, per eadem 14703 secunda: prodibunt enim ex ipsa diuisione, secūda 37095. Quæ rursum duabus diuisionib⁹ sexagenarijs, ad præfatos 10 gradus, & 18 minuta, atq; 15 secunda reuocabūtur. Longè itaq; expeditior esse videtur præfatus diuidendi modus, qui adminiculo ipsius tabulæ proportionalis absoluitur.

*Cvt earundem fractionum quadrata radix extrahenda sit.* *Cap. 6.*

DEVENIENDVM EST CONsequenter, ad quadratæ & cubicæ radicis earundem fractionū astronomicarum inuestigationem.

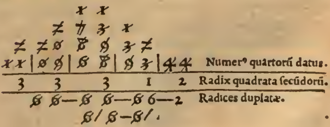
1 Quantum igitur ad quadratā videtur spectare radicem: ea duplici, iuxta præmissam diuisionis traditionem, colligitur artificio. In primis facta singularum specierum ad munitiorem reductione: ipsa radix quadrata non aliter elicienda est, quàm septimo capite libri primi de integrorum tradidimus radicibus. Sed operæpretium est, singula ad eā reducere fractionem, quæ ab aliquo parium denominetur numero, cuiusmodi sunt quarta/

Prim⁹ modus extrahendi quadratā fract. astro. radicem.

ſexta, octaua, &c. nam radix ipſa, à dimidia parte ipſius numeri paris cõmodiſſimè denominabitur. quæ tandem via reductionis, in ſitos fractionum ordines (ſi ſexagenarium exuperauerit numerum) reuocanda eſt.

Exẽplũ primi modi.

¶Proponantur in exemplum, 2 ſigna cõmunia, 25 gradus, 37 minuta, 27 ſecunda, 2 tertia, & 24 quarta: quorum quadratam iubearis inuenire radicem. Duo itaq; ſigna cõmunia, efficiunt gradus 60: qui vnà cum 25 gradibus, conficiunt 85. Ipſi porrò 85 gradus, per 60 multiplicati, reddunt minuta 5100: quæ vnà cum 37 minutis, efficiunt minuta 5137. Quæ rurſum ducta in 60, vertuntur in ſecunda 308227: vnà cum 27 ſecundis, hunc ſecundorum conficientia numerũ 308247. Ex quibus, vnà cum ipſis duobus tertijs, eliciuntur tertia 18494822. Hæc autem in quarta reuocata, & ipſis 24 adiuncta quartis, conſurgunt tandem in quarta 1109689344. Horum porrò 1109689344 quartorum radix quadrata, iuxta ipſius ſeptimi capitis libri primi traditionem, offenditur eſſe 33312: vti ſubiecta deſcriptio monſtrat.



Hæc autem 33312, secũda dicentur: sola enim secũda per sese multiplicata, restituunt quarta.

Oportet enim nõ solum ipsam radicem per sese multiplicatã, eum conficere numerũ cuius est radix: sed & eiusdem radicis denominatorem per sese itidem multiplicatum, eiusdem numeri nomenclaturam simul restituere. Hæc demum 33312 secunda diuisa per 60, reddunt minuta 555: relictis secundis 12. Ex quibus 555 minutis, colliguntur 9 gradus: relictis 15 minutis. Ergo radix quadrata præassumptarum fractionũ, habet 9 gradus, 15 minuta, vnà cum secundis 12.

Notandũ.

2 ¶EANDEM QVOQVE RADICEM, adminiculo præfatæ tabulæ proportionalis, longè faciliùs ac expeditiùs multò, licebit inuestigare. Notabis igitur, singulos areales tabulæ numeros, ipsius a c/& e f/capitales immediatè succedentes (quos differentiæ gratia, punctis annotauimus) esse quadratos. Quod igitur præfato capite septimo libri primi, de singulis elementis faciendum esse docuimus. Hic de singulis fractionũ speciebus, respõdenter obseruare est operæpretium. Debes autem ab ipsis gradibus (quoties occurrerint) primariã ipsius radicis deducere nomenclaturam: vtpote, qui primariam circuli videntur constituere partitionẽ, & integra propterea vocitãtur: signa enim nihil aliud sunt, quàm eorundem graduum collectiones.

Secũdus & facilior modus extrahẽdarũ radicum quadratarũ, in fract. astro.

¶Resumantur facilioris intelligentiæ gratia,

Exemplũ. secũdi modi, extrahẽdarũ radicum quadratarũ.

præfata 2 ſigna communia(quæ 1 ſignum maius repreſentant, ex 60 cõſtans gradibus) gradus inſuper 25, minuta 37, ſecunda 27, tertia 2, & quarta demum 24. His igitur ordine diſtributis, vnà cum ſubſcriptis lineis parallelis: vide an inter ipſos quadratos tabulæ numeros, offendantur 1/25. Occurrent autem tibi 1/21, proximè minores numeri, 1 ſignum & 21 gradum repreſentantes. Hos igitur ſuper 1/25 ſcribito, atque ab eiſdem 1/25 ſubducito: relinquẽtur tandem gradus 4. Quibus notatis. & deletis prioribus numeris: accipito verticalem ipſius columnæ numerum, vtpote 9, ſcribendum intra lineas parallelas ſub ipſis 25 gradibus. Hos demum 9 gradus duplica, fient gradus 18: quos reponito ſub eiſdem 9 gradibus, infra lineas parallelas. Hac prima radicis ſpecie reperta, accipe 18 in ipſo latere a b, à quibus recta progrediendo via, offendes tandem 4/30/ proximè minores numeros: qui vnà cum quadrato numero in eadem occurrente columna, ſcilicet 3/45 ſolito more coniuncti, efficiunt 4/33/45. Quibus ſuprascriptis, & à reſiduis numeris ordine detractis: relinquentur 3 minuta, & 42 ſecunda, deletis prioribus numeris ſurſum annotanda. Pro ſecunda autem radice, ſumenda ſunt 15, ad ipſius columnæ verticem, in a c/ latere, ſuper dictos occurrentia numeros: & intra lineas, poſt 9 gradus ſubſcribenda. Quæ demum duplabis, fient minuta 30, ſub eiſdem

Prima radicis ſpecies.

Secũda radicis ſpecies.

annotãda parallelis. Verùm ſi minuta dupla‐ta creſcerent in 60: pro eodẽ ſexagenario nu‐mero, iungẽdus eſſet vnus gradus præfatis 18 gradibus, reliquis minutis ſuo loco dimiſſis. Quod & in cæteris duplatis fractionũ nume‐ris, reſpõdenter velim intelligas fore obſeruã‐dum. Rurſum è recta regione ipſorũ 18 & 30, in præfato latere a b coaſſumptis, perquirãtur numeri in eadẽ columna cũ ſupraſcripto qua‐drato ſimul occurrẽtes, & ſæpiꝰ expreſſo more cõiuncti reſiduos cõficiẽtes fractionũ nume‐ros. Offendes itaq; ad dextrã ipſorũ 18 graduũ 3/36, & ſub his è regione 30 minutorum 6/0, & quadratũ in eadem columna ſimul occur‐rentem 2/24: quæ vt obiecta monſtrat for‐mula, conficiunt 4/42/2/24, hoc eſt, reliqua 3 minu‐ta, 42 ſecunda, 2 tertia, & 24 quarta. Quibus ſupraſcri‐ptis, & detractis: nihil tandẽ relinquetur. Ac‐cipiantur igitur ad ipſius colũnæ verticẽ, pro tertia radicis ſpecie, 12: quæ ſecũda dicentur, ſcribẽda poſt 15 minuta, intra lineas pallelas.

Notandũ.

Tertia radicis ſpecies.

|  |  |
|---|---|
| 3 · 36 |  |
| 6 · 0 |  |
| 2 · 24 |  |
| 3 · 42 · 2 · 24 |  |

---

Signa maiora. Gradus. Minuta. Secunda. Tertia. Quarta.

3 — 42 — 2 — 24<br>
4 3 · 42<br>
4 · 33 — 45<br>
1 — 21<br>
1 · 25 · 37 · 27 · 2 · 24 Numeri dati.

9 · 15 · 12 · Radix quadrata.

18 · 30 Radices duplatæ.

Concludes igitur, præassumptum fractionum ordinem esse quadratum: & illius radicem habere 9 gradus, 15 minuta, & 12 secunda, qualem via reductionis nuper adinuenimus. Concurrunt igitur in eadem tabulæ columna, ipsi radicales numeri, & producti ex singulis duplatis per eandem radicem multiplicatis, vnà cum ipsius radicis quadrato numero: quos alioqui tedioso admodũ & prolixo discursu, colligere esset operæpretium.

## *De cubica prædictarum fractionum astronomicarum radice.* Cap. 8.

Prim⁹ modus extrahendi cubicā fractionum astro. radicem.

RELIQVVM EST, VT CVBIcæ radicis inuentionem datarum quarúmque fractionũ astronomicarum, paucis edoceamus: quanquã ea rarò veniat in vsum. Hęc 1 igitur, veluti quadrata radix, duobus modis extrahitur. In primis, reductis singulis fractionum speciebus, ad minutioris fractionis denominationem: sed ad eam, cuius denominator in tres partes inuicẽ æquales diuidi vel facilè possit, cuiusmodi sunt tertia, sexta, nona, duodecima, &c. Nam radix ipsa cubica, ab ipsius denominatoris tertia parte, in quẽ datus conuersus est numerus, semper venit denominanda. Facta igitur reductione, eadem radix cubica, iuxta tenorem octaui capitis ipsius primi libri, prorsus extrahenda est.

Exēplũ primi modi.

Offerantur exempli gratia, 27 gradus, 55

minuta,3 secũda,44 tertia, 21 quarta,6 quinta, & 1 sextum: quorum omnium, cubica radix extrahẽda proponatur. Hęc igitur omnia, per sexagenariã multiplicationem resoluas in sexta: consurgẽt autẽ ex ipsa reductione, sexta 1302528459961. Quorum radix cubica, per ipsius octaui capitis libri primi traditionem supputata, habet 10921 : vti subscripta monstrat formula. Hæc autem 10921,

3
7 4 5 7
0 8 2 9 9 7 7 1
1 | 3 0 2 | 5 2 8 | 4 5 9 | 9 6 1. Nu.sextorũ datus.

| 1 | 0 | 9 | 2 | 1. Ra.cubica secũdorũ. |
|---|---|---|---|---|

3 . 3 0 . 3 2 7 . 2 7 6 Radices triplatæ.
3 1

secũda veniunt appellanda: sola enim secunda cubicè multiplicata, efficiunt sexta, ad quæ propositus fractionum reductus est numerus. Quòd si præfata 1 0 9 2 1 secunda, per 60 diuidantur, prodibunt minuta 182, vnico relicto secundo. Ex ipsis autem 182 minutis, tres colligentur gradus, relictis duobus secundis. Et proinde cubica radix ipsius propositi fractionum numeri, habet 3 gradus, 2 minuta, & 1 secundum.

Secundus modus extrahẽdi cubicam radicẽ, in fract. astrono.

2 ¶ SI IVVET AVTEM CVBICAM ipsius oblati numeri radicẽ, officio tabulæ proportionalis tandẽ inuestigare: id facies, de singulis fractionum speciebus idẽ respondenter obseruando, quod præfato capite octauo libri

primi de singulis integrorũ numerorũ elementis tradidim⁹. Memineris tamẽ, sex tãtũmodò cubos numeros in ipsa tabula cõtineri, in inferiori parte ab c d/ sparsim distributos, quos rubro colore maioris euidẽtię gratia distinxim⁹:

De cubis in tabula contentis.

¶ Resumantur ergo, ad maiorem artis expressionem, præfati 27 gradus, 55 minuta, 3 secunda, 44 tertia, 21 quarta, 6 quinta, & 1 sextum. His solito more coordinatis, vnà cum subscriptis parallelis: accipe cubum numerum proximè minorem numero dato, vtpote 0/27, solos 27 gradus repræsentantem. Quo suprascripto, & detracto ab eisdem 27 gradibus: sumantur 3, in a c/latere, ad verticẽ eiusdem columnæ concurrentia, pro primo radicis numero, quæ gradus dicentur: nam gradus quadratè vel cubicè multiplicati, reddunt semper gradus. Scribe ergo 3 gradus intra parallelas: quos postmodum triplica, fient gradus 9, sub eisdem gradibus infra parallelas annotandi.

Exemplum inuentionis primæ radicis, iuxta secundum modum.

His absolutis, accipe 27 gradus in a b/latere: & è dextra illorũ regione, inuestiga numerum relicto proximè minorẽ: hunc experieris esse 54 minuta, scribẽda sup 55: ad quorũ verticẽ offendes 2, quæ minuta dicentur, collocãda post 3 gradus intra parallelas, pro secundo radicis numero. Hic autem numerus 54 (vt rẽ acu tangamus) est qui generatur ex ductu 3 graduum radicis in 9 triplatos, & multiplicatione producti per ipsa 2 minuta. Reliquũ est igitur, vt multiplices ipsa 2 minuta radicis per

Secũdæ radicis inquisitio.

9 gradus triplatos,& productum numerũ ducas rursum in eadem 2 minuta, per lateralem videlicet ingressum in ipsam tabulam:consurgent enim secunda 36,super 3 secunda consequenter annotanda. Accipiendus est tandem numerus cubus, in eadem columna cum ipsis 54 minutis occurrēs:vtpote 0/8,hoc est,8 tertia, ex cubico eorundem duorum minutorum ductu prouenientia,scribenda super tertia 44. Auferantur deniq; ipsa 54 minuta,36 secũda, & 8 tertia, ab ipsis 55 minutis, 3 secundis, & 44 tertijs:relinquentur secunda 27,tertia 36. Quibus annotatis, & deletis prioribus numeris:triplabis ipsa 2 minuta radicis,fient 6,quę sub ipsis parallelis tandē veniunt annotanda.

Tertiæ radicis adinuentio notanda.

Rursum accipito prędictos 27 gradus in eodē latere a b, & ad dextrā ipsorũ regionem perquirito numerum relicto secundorum numero ęqualem: is erit 27 in prima occurrens colũna,quē scribes supra 27 secũda.in cuius columnæ vertice,sese offeret vnitas,quæ 1 dicetur secundum,pro tertia radicis specie post 2 minuta reponendum.Est autem huiusmodi numerus 27, qui ex ductu 3 graduum radicis in 9 triplatos, & producti multiplicatione per idem secundum generatur. Reliquum est igitur ducere præfatos 3 gradus, 2 minuta, & 1 secundum radicis,in 6 minuta duplata,& ipsa 2 tantummodò minuta & 1 secundum,in 9 gradus triplatos,per lateralē videlicet ingressum in ipsam tabulam: fient enim minuta 36,

secunda 21, tertia 6: quę rursum per 1 secundum radicis multiplicata, vertentur in 36 tertia, 21 quarta, & 6 quinta: velut obiecta numerorum formula monstrat. His iũgatur cub⁹ numerus, ex vno secundo radicis generatus: vtpote 1 sextum, secũda enim cubicè multiplicata, producũt sexta. Quòd si hoc modo collectos fractionum numeros, à relictis subduxeris numeris: nihil tandem relinquetur.

| g. | m̃. | 2̄. | 3̄. | 4̄. | 5̄ |
|---|---|---|---|---|---|
| 3. | 2. | 1 | | | |
| 9. | 6. | | | | |
| | | | 18. | 12. | 6 |
| | | | 18. | 9. | |
| | | | 36. | 21. | 6 |
| | | | | | 1 |
| | | | 36. | 21. | 6 |

| Grad. | Miñ. | Secũ. | Tertia. | Quarta. | Quinta. | Sexta. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 27 — 36 \ | | | | | |
| | | 27 . | 36 . | 21 — | 6 — | 1 | |
| 27 . | 54 — | 36 — | 8 | | | | |
| 27 . | 55 . | 3 . | 44 . | 21 . | 6 . | 1 | Numer⁹ datus, cubus. |
| 3 . | 2 . | 1 | | | | | Radix cubica. |
| 9 | 6 | | | | | | Radices triplatæ. |

Concludes igitur, præassumptum fractionum numerum esse cubum: & illius cubicam radicem habere 3 gradus, 2 minuta, & 1 secundum: quantam videlicet per primum modũ, via reductionis nuper offendimus. Habes itaque primo intuitu ex ipsa tabula, adminiculo primi cubi ex prima radice procreati, radicem succedentem, vnà cum numero ex ipsa prima radice in triplum eiusdem, atque rursum

per ipſam radicem facta multiplicatione pro-
ducto. Cætera autem, iuxta viam multiplica-
tionis, conformiter ad ea quæ octauo
capite libri primi de integrorum tra-
didimus radicibus, reſpondenter
abſoluuntur. Hæc igitur de
fractionibus aſtrono-
micis, ſint ſa-
tis.

LIBRI TERTII
Arithmeticæ practicæ
FINIS.

# LIBER QVARTVS

## Eiusdem Arithmeticæ practicæ: De ratione atque proportione numerorum, & præstantioribus eorũdem numerorum inuicem proportionalium regulis.

*De rationis atque proportionis diffinitione, & utriusq; speciebus & differentijs.* Cap. I.

RELIQVVM EST, in hoc libro quarto & vltimo, de rationibus atque proportionibus numerorum, (& proinde rationalium, ad numerósue relatarum magnitudinum) déq; prestantioribus eorundem numerorum inuicem proportionalium regulis, cuiuis arithmetico/geometræ / vel astronomo necessarijs, summatim pertractare: Vt trium antecedentium librorũ capita, tum in Mathematicarum, tum in ciuilium rerũ vsum, tandem reuocare doceamus.

Rationis diffinitio.

Ratio igitur (vt ad rem ipsam deueniamus) 2

eſt duarum quantitatum eiuſdem ſpeciei ad-inuicem comparatarum habitudo. De quan-titatibus velim intelligas, quæ ſub communẽ quotæ partis dimenſionem cadunt, & cõmen-ſurabiles, rationaléſque nuncupantur: & ratio-nem habent adinuicem, quam numerus ad nu merum. Sunt enim numeri omnes, & ad nu-meros relatæ quantitates, cõmenſurabiles, & proinde rationales. Habitudo autem incom menſurabilium & irrationalium quantitatum, quæ tum nobis, tum ipſi naturæ ignota eſt, & ſurda vocitatur: hoc eſt, quæ nec exprimi, nec conſequenter audiri poteſt, ratio non ve-nit appellanda: cùm ratio, ſit propriè cõmen-ſurabilium & rationalium quantitatum inuicẽ comparatarum, ſiue numerorũ habitudo.

De ſurda irrationaliũ quãtitatum habitudine

3 ¶Rationũ porrò, alia æqualitas, alia verò inę-qualitas. Aequalitatis ratio, numerorum, vel quãtitatũ inuicẽ æqualiũ vocitatur habitudo: inęqualitas verò, quæ inter inęquales accidit. Aequalitatis ratio, ab vnitate denominatur: in-ęqualitatis autẽ, ab ipſis numeris ad numeros vel vnitatẽ relatis. Hinc fit, vt æqualitatis ra-tio nullã admittat differentiam: inæqualitatis autem ratio, in infinitum vt ipſe progrediatur numerus. Inæqualitatis præterea ratio, aut maioris inæqualitatis dicitur, cùm ſcilicet maior quãtitas minori cõparatur: aut minoris inæqualitatis ratio nuncupatur, quoties vide-licet minoris ad maiorem quantitatem fit cõ-paratio. Tot igitur ſunt rationum ſpecies &

Rationis ſubdiuiſio.

Inęqualitatis ratio duplex.

differentiæ maioris, quot & ipsius minoris inæqualitatis.

Quinq; rationum inæqualitatis species.

¶Species autẽ rationũ maioris inæqualitatis, 4 sunt quĩq;: tres quidẽ simplices, vtpote, multiplex, superparticularis, & superpartiẽs: & duæ ex illis compositæ, quę multiplex superparticularis, & multiplex superpartiẽs appellãtur.

Ratio multiplex.

¶Multiplex itaq; ratio dicitur, cũ maior quãtitas minorẽ pluries quàm semel pręcisè comprehendit: cuius differentiæ sunt infinitæ, nẽpe tot, quot & ipsi numeri vnitati comparati, vtpote, dupla, tripla, quadrupla, quintupla, sextupla, &c.

Superparticularis ratio.

¶Superparticularis autem ratio nominatur, cùm maior quantitas semel cõtinet ipsam minorem, & quotã præterea eiusdem minoris partẽ. Et quoniam tot sunt partium quotarum nomina, quot & numeri: infinitæ igitur erunt superparticularis rationis differentiæ, vtpote, sesqualtera veluti 3 ad 2, sesquitertia vt 4 ad 3, sesquiquarta vt 5 ad 4, &c.

Numeri superparticulares.

Generantur autẽ superparticulares numeri, si linea naturalis numerorum à ternario inchoata proponatur, & illi subscribatur eadẽ linea, sed à binario initiata numero, & superiores numeri inferioribus comparentur.

| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |

Ratio superpartiẽs.

¶Superpartiens verò dicitur ratio, quoties 5 maior quantitas minorem semel cõprehendit, & partem ipsius minoris non quotam, sed ex quotis illius partibus resultantẽ. Quæ rursum

tum ex parte numeri, tũ ex parte denominationis earundem partium quotarũ ipſam partem non quotã efficientium, infinitas recipit differẽtias: vtpote, bipartientẽ tertias vt 5 ad 3, tripartiẽtẽ quartas veluti 7 ad 4, quadripartientem quintas vt 9 ad 5, &c. Procreabis autem numeros ſuperpartiẽtes, ſi lineam impariũ numerorũ à quinario initiatã ordinaueris, & illi ſubnotaueris naturalem numerorũ ſeriẽ à ternario exordientẽ: nam ſuperiores inferioribus cõparati, ſuperpartientes offendentur.

Numeri ſuperpartientes.

| 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 27 | 29 | 31 | 33 | 35 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |

6 ℭQuòd ſi maior quantitas, minorem pluries quàm ſemel cõprehendat, & partem inſuper eiuſdẽ minoris quotam: talis ratio, multiplex ſuperparticularis appellatur. Vnaquæq; igitur differẽtia multiplicis, ſingulas recipit differentias ipſius rationis ſuperparticularis. Alia enim dupla ſeſqualtera dicitur, vt 5 ad 2: alia dupla ſeſquitertia, veluti 7 ad 3: & ſic conſequenter. Idem intelligas velim de tripla, quadrupla, & cæteris differentijs multiplicis. Si igitur inferiorẽ lineam ſuperparticularium ſuperiori coniunxeris, & productos eiſdem inferioribus numeris ſupraſcripſeris: conficies omnes differẽtias multiplicis ſuperparticularis, ſub ratione dupla cõprehenſas.

Multiplex ſuperparticularis ratio.

Numeri multiplices ſuperparticulares.

| 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 27 | 29 | 31 | 33 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |

Et si rursum hoc modo procreatorum numerorum inferiores superioribus cõposueris, ac eisdem inferioribus resultantes comparaueris numeros: consurgent eiusdem multiplicis superparticularis differentiæ, sub ratione tripla concurrentes.

| 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 27 | 29 | 31 | 33 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |

Et sic deinceps quantumlibet, per continuam additionem inferiorũ numerorũ cum productis superiorib⁹: reliquas multiplicis superparticularis differẽtias, sub cæteris multiplicibus comprehensas ordine procreabis.

Ratio multiplex superpartiens.

¶ Si deniq; maior quantitas, minorem rursum pluries quàm semel cõprehendat, & partem non quotam ipsius minoris: eiuscemodi ratio, multiplex superpartiens nũcupatur. Hinc fit, vt vnaquæq; multiplicis differentia, singulas differentias ipsius rationis superpartientis indifferenter admittat. Erit enim aut dupla bipartiens tertias, vt 8 ad 3: aut dupla tripartiens quartas, vt 11 ad 4: vel quadripartiens quintas, vt 14 ad 5: & sic de cæteris. Fient autem singulæ multiplicis superpartientis differentiæ, sub ratione dupla cõprehensæ: si infimũ superpartientiũ numerorũ ordinẽ, superiori singulatim adiunxeris, & resultãtes inde numeros eisdẽ inferioribus cõparaueris. vt hic.

Nũeri multiplices superpartientes.

| 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 | 29 | 32 | 35 | 38 | 41 | 44 | 47 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |

Et ſi hoc modo procreatis ſuperioribus nume- ris, infimos iterũ coniunxeris numeros, ac eiſ- dem inferioribus numeris conſurgentes inde numeros ſuperſcripſeris: conficientur ſingulæ multiplicis ſuperpartientis differentiæ, quæ ſub tripla ratione continentur. Quarum ſub- ſequitur exemplum.

| 11 | 15 | 19 | 23 | 27 | 31 | 35 | 39 | 43 | 47 | 51 | 55 | 59 | 63 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |

Et in hunc modum conſequenter (vt de mul- tiplicibus ſuperparticularibus nunc præcepi- mus) ſingulas multiplicis ſuperpartientis dif- ferentias, ſub cæteris multiplicib⁹ rationibus concurrentes reſpondenter procreare licebit.

Si demũ vnicuiq; prædictarũ ſpecierum, & differentiarũ, ſiue rationũ maioris inęqualita- tis, hanc ſyllabã ſub adieceris: eas in minoris inæqualitatis rationes vel facilè conuertes. Notandũ.

7 ¶HIS PRAELIBATIS, dicendum eſt conſequenter de proportione, eiuſque diffe- rentijs, & illationibus. Proportio eſt, contin- gens inter comparatas adinuicem quãtitates rationum ſimilitudo: Quantitates igitur, inter quas ſimiles offenduntur rationes, proportio- nales appellantur. Cuiuſmodi ſunt hi numeri, 8/4/6/3: ſicut enim 8 ad 4, ſic 6 ad 3, vtro- bique enim ratio dupla. Exceſſuum autem, ſiue differentiarum æqualitas, progreſſio di- citur: Et quantitates inter quas idem offendi- tur exceſſus ſiue differentia, progreſſionales Proportio. Progreſſio.

nuncupantur.de quibus,capite nono libri pri-
Harmonia. mi abundè dictum est. Tribus porrò datis nu-
meris,si maximus ad minimũ eandem habue-
rit rationem,quam differentia ipsius maximi
supra medium, ad differẽtiam eiusdem medij
supra minimũ:eiuscemodi rationũ similitudo,
harmonia propriè venit appellãda. Qualis in-
ter hos videtur accidere nume-
ros, quorum differentiæ, sunt 2
& 1 : sicut enim 6 ad 3, sic 2 ad
1. Sed de his & similibus harmonijs,latiùs in
Musica nostra differemus.

6 , 4 , 3
2 1

¶Proportionum igitur, alia continua,alia ve- 5
rò discontinua vocitanda est. Continuam ap-
pellamus proportionem,rationum similitudi-
nem,inter ordinatim comparatas quantitates
accidentem:cùm videlicet intermediæ quan-
titates,antecedentis & consequentis fungun-
tur officio.Qualem obseruant hi numeri,8/4/
2/1:vt enim 8 ad 4,sic 4 ad 2,atque 2 ad 1, vbi-
que enim ratio dupla. Hæc igitur proportio
continua , inter ea solùm reperitur,quæ eius-
dem sunt speciei:& in tribus terminis,ad mi-
nus consistere videtur . Quantitatum insuper
continuè proportionalium æquè multiplices,
aut submultiplices, continuè itidem,ac in ea-
dem ratione sunt proportionales : similiter &
illarum differentiæ. Vt ex præassumptis , sub
ratione dupla continuè proportionalibus,po-
tes elicere numeris: quorũ æquè multiplices,
vtpote tripli , atque illorum differentiæ, sub

Continua proportio.

Cõtinuè proportionaliũ cõditiones notandæ.

| 24 | 12 | 6 | 3 | Aequè multiplices, tripli: |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 4 | 2 | 1 | Nũeri cõtinuè ꝓportionales. |
| | 4 | 2 | 1 | Differẽtiæ eorũdẽ numerorũ. |

eadem ratione dupla continuè itidem proportionãtur. Diſcontinua verò proportio, eſt diſcontinuè comparatarum quantitatum, rationum ſimilitudo: cùm videlicet antecedentes, ſuis tantùm conſequentibus ſub eadem ratione colligantur. Qualem obſeruare cõperiuntur hi numeri, 8/4/6/3: vt enim 8 ad 4, ſic 6 ad 3, ſed non 4 ad 6. Reperitur autem proportio diſcontinua, tam inter ea quæ ſunt eiuſdem ſpeciei, quàm ea quę ſpecie videntur eſſe diuerſa: & in quatuor ad minus terminis neceſſariò conſtituitur. Præterea, ſi quantitatũ diſcõtinuè proportionaliũ antecedentes æquè multiplicentur, ſimiliter & conſequentes: conſurgent quantitates, diſcontinuè itidem proportionales. Idem habeto iudicium, de ſimili modo ſumptis, tam antecedentium, quàm etiam conſequentium æquè multiplicibus: ſed tunc eadem quæ inter datas quantitates obſeruatur rationum ſimilitudo. Vti ſubſcriptæ præaſſumptorum numerorum oſtendunt formulæ.

Proportio diſcõtinua.

Diſcõtinuè proportionaliũ conditiones.

| 24 | 8 | 18 | 6 | Multiplices diuerſi. | 24 | 12 | 18 | 9 | æquè multiplices. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 4 | 6 | 3 | Numeri dati. | 8 | 4 | 6 | 3 | numeri dati. |

6 ¶ EX CONTINVA DEMVM, AVT diſcontinua quatuor quantitatũ (eiuſdem ſpeciei velim intelligas) proportione: varię ſubinferũtur proportiones, pro diuerſa videlicet

Ex eadem proportione, diuerſas ſuboriri ꝓportiones.

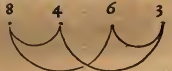
antecedentium & consequentium adinuicem facta cõparatione subsequẽtes: tanta est ipsorum quatuor proportionaliũ vis, atq; vbertas.

Conuersa ꝓportio.

¶In primis, nascitur conuersa proportio: cùm videlicet rationes maioris inæqualitatis, in rationes minoris, aut è diuerso, per conuersam terminorum adinuicem factam cõparationem transmutamus. Vtpote, si fuerit vt 8 ad 4, sic 6 ad 3: erit & è conuerso, vt 4 ad 8, sic 3 ad 6: consequẽtes enim numeri, in antecedentium conuertuntur officium, & è diuerso.

Permutata ꝓportio.

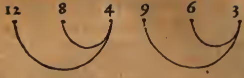
¶Secundò, elicitur proportio, quæ permutata siue reciproca nuncupatur. Dicuntur autem permutari rationes, cùm prima tertiæ, & secũda quartę cõparatur: sic enim consequens primæ rationis fit antecedens secundæ, & antecedens secundæ consequens ipsius primæ. Vt datis rursum numeris 8 / 4 / 6 / 3, sub ratione dupla discõtinuè proportionatis: erit permutatim vt 8 ad 6, sic 4 ad 3:




vtrobique enim offenditur ratio sesqualtera.

Proportio cõposita.

¶Subinfertur & alia proportio, quæ à terminorum cõpositione, cõposita dicitur: in qua videlicet antecedentis cum consequẽte ad ipsum consequens fit comparatio. quæ à diuisis ad coniuncta nominatur assumptio. Vtpote, si fuerit vt 8 ad 4, sic 6 ad 3, & subinferamus: ergo erit vt 12 ad 4, sic 9 ad 3. si componantur enim 8 & 4, fiunt 12: & 6 cum 3, faciunt 9.



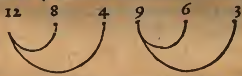

habẽt autem 12 ad 4 eãdem rationẽ, quã 9 ad 3.

Diuisa proportio.

¶Huic cõtraria eſt diuiſa proportio. Eſt enim cõparatio differentiæ cuiuſlibet antecedentis ſupra ſuum conſequens, ad ipſum cõſequens. Exempli gratia, ſi 12 ad 4 eãdem habeant rationem, quam 9 ad 3, & ſubinferamus: ergo 8 ad 4, ſe habent vt 6 ad 3. excedunt enim 12 ipſa 4, per 8: & 9 ipſa 3, per 6.

Euerſa proportio.

¶ Colligitur & euerſa ſiue reflexa proportio, quæ cõuerſio rationis dicitur. Fit autem, cùm antecedentia ſuis cõparãtur differentijs, quibus ſua excedunt conſequentia. Vt ſi rurſum 12 ad 4 eandem habeant rationem, quam 9




ad 3: erit vt 12 ad 8, ſic 9 ad 6. differunt enim 12 & 4, per 8: atque 9 à 3, per 6.

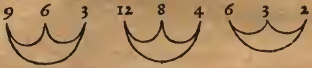
Notandũ.

In conuerſa igitur atque permutata proportione, tam antecedentes, quàm etiam conſequentes termini, permanent ſubſtantialiter ijdem: in compoſita autem, & diuiſa, atq; euerſa proportione minimè, ſed alterantur, tametſi nihil aſſumatur extrinſecum.

Aequa proportio.

¶His addunt æquam proportionem, quæ ex duobus quantitatum ordinibus, æquali multitudine diſtributis, & ſub eiſdem rationibus

binatim ſumptis ordinatè vel inordinatè pro‑
portionatis naſcitur : cùm videlicet in primo
ordine prima ad vltimam ſe habet, vt prima
ad vltimã in ſecundo,aut(ſi mauis)ſubtractis
intermedijs, extremæ quantitates ſub eadem
ratione proportionales exiſtunt. Vtpote,ſi 9
ad 6 eandem habeant rationem , quam 12 ad
8,atque 6 ad 3,quam 8 ad 4,& ſubinferamus:
ergo erit vt 9 ad 3,ſic 12 ad 4. Vel ſic,ſi fue‑
rit vt 8 ad 4,ſic 6 ad 3,atque vt 3 ad 2, ſic 12
ad 8:erit rurſum vt 12 ad 4,ſic 6 ad 2. vt ob‑
iectæ numerorum indicant formulæ.




*¶De additione , ſeu multiplicatione rationum ad‑
inuicem:atque earundem rationum diuiſione,
uel ſubtractione.* Cap. 2.

POST RATIONVM, ATQVE proportionum præmiſſam tradi‑ tionem,cõſentaneũ eſſe videtur, vt de productione rationis , ex duabus quibuſuis rationibus inui cem adiunctis & ſubtractis, ſeu multiplicatis & diuiſis generatæ , pertractemus : Id enim haud parum ijs videtur conducere , qui circa harmonias , aliáſq; ſecretiores Mathematica‑ rum verſantur excogitationes.

I

Idē est igitur (ne te lōgiori detineamus ambage) duas rationes inuicem addere, quod & vnam per alterā multiplicare: ac vnam ex altera subtrahere, quod illarum maiorem diuidere per reliquam: cùm additio per multiplicationem, subtractio autem per ipsam diuisionem in rationibus absoluatur.

Notandū.

2 ¶Quantum igitur ad rationum spectat cōpositionem, duo sese offerunt inuestiganda. primū est, productę seu consurgentis inde rationis denominator: secundum autem, numeros colligere sub eadem generata ratione constitutos. Primū igitur (vt paucis expediamus) sic absolues. Duc vnius rationis denominatorem, in denominatorē alterius: fiet enim generatę, seu compositę rationis denominator. Secundum porrò, in hunc modū obtinebis. Multiplica datarum rationū antecedentes numeros adinuicem, similiter & cōsequentes: Nam ex antecedentiū multiplicatione, nascetur antecedens: ex consequentium autem multiplicatione, consequens eiusdem rationis, quæ ex ipsis duabus inuicem compositis generatur.

Vt duæ rationes, ī vnam rationem cōponantur.

Regulæ generales.

Hæc autē velim intelligas, vbi ambæ rationes datę, simul maioris, aut simul minoris fuerint inæqualitatis. Nam si vna maioris, altera verò minoris inæqualitatis extiterit: tunc ea ratio quę à maiori denominatur quātitate, per reliquam diuidēda est: vt infra, de subtractione rationum exprimetur.

Notandū.

3 ¶Demus in exēplum triplam rationèm, inter

Exẽplũ in multiplicibus. hos numeros 9 / 3 , & duplam inter istos 4/ 2,consistentem. Duc igitur 3 denominatorem triplæ,in 2 ipsius duplę rationis denominatorem:fient 6.aio itaq;, ex tripla & dupla ratione,confici sextuplam. Quod ex ipsis confirma tur numeris. Si ducantur enim 9 in 4,fient 36: & 3 in 2,fient 6. Atqui 36 ad 6 rationem habẽt sextuplam, qualẽ ex ipsis collegimus denominatoribus.

| | |
|---|---|
| Tripla. | 9—3 |
| Dupla. | 4—2 |
| Sextupla. | 36—6 |

Exẽplũ in superparticularibus. ¶Dentur rursum in exemplum duæ rationes superparticulares: vtpote,sesqualtera quã habent 3 ad 2, & sesquitertia quæ est inter 4 & 3. Duces igitur $1\frac{1}{2}$ sesqualteræ rationis denominatorem, in $1\frac{1}{3}$ denominatorem sesquitertiæ,per doctrinam sexti capitis libri primi: fient 2 , à quibus dupla ratio denominatur. Pronunciabis igitur , ex sesqualtera & sesquitertia,generi duplam. Idem quoq; ex ipsis datis colligitur numeris. Si multiplicaueris enim antecedentes adinuicẽ,vtpote 3 in 4,fient 12:& cõsequentes 2/3 pariter adinuicem, prodibunt 6. Atqui 12 ad 6 rationem habent duplã.

| | |
|---|---|
| Sesqualtera. | 3—2 |
| Sesquitertia. | 4—3 |
| Dupla. | 12—6 |

Corollariũ notãdum. Cùm igitur cõsonãtia quæ diapẽte vocatur, in sesqualtera ratione cõsistat, diatessaron autẽ in ratione ses quitertia:euidens relinquitur,cur præfatæ cõsonãtię diapason efficiãt,quã duplã appellãt.

¶Addamus & exemplum in superpartiẽtibus rationibus : sitq; bipartiens tertias, addenda

tripartienti quartas, hoc est, ratio quam obseruant 5 ad 3, ei quæ est 7 ad 4. Denominator bipartiētis tertias est $1\frac{2}{3}$, ipsius verò tripartientis quartas $1\frac{3}{4}$: quę inuicē multiplicata, reddunt 2 & $\frac{11}{12}$, à quibus dupla vndecupartiens duodecimas nominatur. Ergo ex bipartiente tertias, & tripartiente quartas, conficitur ratio dupla vndecupartiens duodecimas. Hanc quoq; rationem, constituunt & ipsi dati numeri. Nam si antecedentes 5 & 7 inuicem multiplicaueris, prodibunt 35: ex consequentium autē multiplicatione, vtpote 3 in 4, fiunt 12. Cōtinēt autē 35, ipsa 12 bis, vná cū $\frac{11}{12}$.

Exēplum in superpartientibus.

| | |
|---|---|
| Bipartiens tertias. | 5—3 |
| Tripartiēs quartas. | 7—4 |
| Dupla vndecupartiens duodecimas. | 35—12 |

¶Reliquum est, vnicum exemplum exhibere, vbi altera rationū maioris, altera verò minoris est inæqualitatis. Sit igitur subdupla, componēda cum sesqualtera: vtpote ratio quā habet 1 ad 2, cū ratione 3 ad 2. Subdupla ratio à binario denominatur, nēpe ab eodē numero quo & ipsa dupla: sesqualtera autē ab $1\frac{1}{2}$, quę minora sunt 2. Diuidantur ergo 2 per $1\frac{1}{2}$, prodibunt $1\frac{1}{3}$: consurget igitur ex propositis rationib⁹, ratio subsesquitertia. nā diuidēda, minoris est inæqualitatis: & procreata ratio, sequitur in hac parte rationē ipsam diuidēdam. Si per ipsos autē numeros hoc idem experiri iuuet: scribe 1/2 super 3/2, & duc 1 in 3, fient 3, ad dextrā

Exēplū vbi vna ratio est maioris, altera vero minoris inæqualitatis.

| | |
|---|---|
| Subdupla. | 1—2 |
| Sesqualtera. | 3—2 |
| Subsesquitertia. | 3—4 |

ſubnotanda:poſtea 2,in 2,fient 4,ſubnotanda læuorſum.habent autem 3 ad 4, præfatam rationem ſubſeſquitertiam.

Qualiter plures duabus rationibus, inuicē cōponātur.

¶Vbi deniq; plures duabus rationibus,inuicē 4 cōponendę proponentur:reſultantem ex duabus primis compones cum ipſa tertia,& inde procreatam rationem cum ſuccedenti quarta, & ſic deinceps quantum libet.Proponantur in

Exemplū.

exemplū hi numeri 4/3/2/3/1. Ex rationibus igitur 4 ad 3, & 3 ad 2, fit dupla: quæ diuiſa per ſequētem ſubſeſqualteram 2 ad 3,reſtituit ſeſquitertiam : hæc autem ducta in triplam 3 ad 1, conficit demum quadruplam, quam habent 4 ad 1.

Corollaria notanda.

¶Ex duabus itaq; rationibus maioris inæqualitatis inuicem compoſitis,ratio itidem maioris inæqualitatis, & vtraque maior generatur. Ex duabus conſequenter minoris inæqualitatis rationibus, minoris inæqualitatis ratio,& vtraq; minor producitur. Ex vna porrò maioris, & altera minoris inæqualitatis ratione:fit ratio talis,qualis eſt ea quæ à maiori denominatur numero.Ratio autem æqualitatis,cū maioris inæqualitatis ratione,eādem maioris inæqualitatis rationem producit.Idē reſpōdenter facit, cum ratione minoris inæqualitatis. Sola igitur ęqualitatis ratio in ſeipſam ducta, rationem producit æqualitatis.

De ſubtractione ſiue diuiſione rationum.

¶CVM AVTEM RATIONEM A RA- 5 tione ſubtrahere fuerit operæpretium, & relictam inde cognoſcere rationem : id facies

( vt prædiximus)per viam diuisionis. Non omnem autē rationem,à qualibet indifferenter subtrahendā esse velim intelligas:sed minorē tantùm à maiori,siue vtraqꝫ maioris,vel vtraque minoris,aut vna maioris & altera minoris fuerit inæqualitatis.Maiorem appellamus rationem,quæ à maiori: minorem autem,quæ à minori quantitate seu numero denominatur.

6 ¶Absoluitur itaqꝫ præfata subtractio, siue diuisio rationum,duobus modis: quemadmodū de earundem rationum compositione , nuper expressimus. In primis diuidēdo maioris rationis denominatorem, per denominatorē ipsius minoris : generabitur enim relictæ , seu procreatæ rationis denominator.Secūdò, per numeros sub datis rationibus constitutos : in hunc qui sequitur modum. Constituantur ipsi numeri maioris & diuidēdę rationis,supra numeros ipsiꝰ minoris.Deinde multiplicetur antecedens diuidendæ rationis, per consequentem numerum ipsius diuidentis: fiet enim ipsius relictæ,seu procreatæ rationis antecedēs. Et per multiplicationem consequentis eiusdē rationis diuidendæ , per consequentem ipsius diuidentis:nascetur consequens eiusdem relictæ, siue procreatæ rationis. Conuenit igitur hic diuidendi modus,cum diuisione fractionū vulgarium:quasi prædictarum rationum antecedentes numeri diuidendam imitentur fractionem,consequentes verò reliquam.

Regulæ generales.

7 ¶Demus in primis exemplū in multiplicibus:

Exemplum in multiplicibus. sitque ratio dupla, ex tripla subducẽda. Diuides itaque 3 denominatorẽ triplæ, per 2 ipsius duplæ rationis denominatorem: fient 1 $\frac{1}{2}$, à quib⁹ sesqualtera ratio denominatur. Procreabitur igitur ex hac diuisione, sesqualtera. Sint rursum numeri in tripla ratione constituti, 9/3: & in dupla, 4/2. Multiplicentur ergo 9 per 2, fient 18: & 3 in 4, fient 12. Habent autem 18, ad 12 rationem sesqualteram: qualem ex ipsis collegimus denominatoribus.

| | |
|---|---|
| Tripla. | 9 X 3 |
| Dupla. | 4 X 2 |
| Sesqualtera. | 18—12 |

Exemplum in superparticularib⁹. ¶ Rursum exponatur superparticularis, à superparticulari similiter auferenda: vtpote, sesquitertia, à sesqualtera. Diuides igitur 1 $\frac{1}{2}$ sesqualteræ denominatorem, per 1 $\frac{1}{3}$ denominatorem sesquitertiæ, per doctrinam septimi capitis antecedentis libri secundi: fient 1 $\frac{1}{8}$, vnde sesquioctaua ratio denominatur. Relinquitur igitur ex proposita subtractione, ratio sesquioctaua. Proponãtur consequenter numeri sub eisdẽ rationibus constituti: vtpote, 3 ad 2 in sesqualtera, & 4 ad 3 in ratione sesquitertia. Duces igitur 3 in 3, fient 9: & 4 in 2, fient 8. Atqui 9, ad 8 promissam à denominatoribus sesquioctauam rationem obseruant.

| | |
|---|---|
| Sesqualtera. | 3 X 2 |
| Sesquitertia. | 4 X 3 |
| Sesquioctaua. | 9—8 |

Exemplum in superpartientibus. ¶ Addamus & in superpartientibus vnicum exẽplum: sitque bipartiens tertias, à tripartiente quartas auferenda. Diuides itaque 1 $\frac{3}{4}$, per

$1\frac{2}{3}$:nafcẽtur $1\frac{1}{10}$, à quibus fefquiuigefima ratio denominatur. Hanc etiam præftabunt numeri, fub præfatis rationibus colligati: cuiufmodi funt 7 ad 4,& 5 ad 3. Nam fi multiplicaueris 7 per 3, fiẽt 21:& 5 per 4, prodibunt 20. Et manifeftum eft, 21 ad 20 fefquioctauam obferuare rationem. Ex fubtractione itaq; bipartientis tertias, à tripartiente quartas, relinquitur fefquiuigefima. Haud alienum habeto iudicium, de quibufcunque fimilibus & fimiliter propofitis rationum fubductionibus.

| | |
|---|---|
| Tripartiẽs quartas. | 7 X 4 |
| Bipartiens tertias. | 5 X 3 |
| Sefquiuigefima. | 21—20 |

¶Ex diuifione igitur rationis maioris inæqualitatis, per rationem maioris, cùm diffimiles fuerint: nafcetur ratio itidem maioris inæqualitatis, vtraque minor. Idem cenfeto refpondenter, de diffimilibus minoris inæqualitatis rationibus: fiet enim ratio minoris inæqualitatis, vtraque pariter minor. At fi ambæ rationes fuerint fimul aut maioris, aut minoris inæqualitatis, & fimiles adinuicem, hoc eft, fi data ratio per feipfam diuidatur: prodibit ratio æqualitatis. Si demum vna maioris, & altera minoris inæqualitatis extiterit: procreabitur ratio, pendens in hac parte ab ipfa ratione diuidenda, quę per maiorem videlicet exprimitur numerum.

Corollaria notanda.

8 ¶ Quòd fi rationem fubtrahendam, alteri fuprafcripferis, & præmiffam obferuaueris multiplicandi ratione: conuerfa ratio producetur,

Notãdum.

nam primus numerus, minor erit ſecundo. Et iſto modo procreata ratio, erit ſola differentiæ ratio, qua minor ſuperatur ab ipſa maiore: quoniam maiorem à minori ſubducere, vel minorem per maiorē diuidere rationem, eſt impoſſibile. Hoc autem, ex ſubſcriptis præmiſſorum exemplorum numeris, deprehēdere vel facilè licebit: quorum hæc ſunt formulæ.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Dupla.<br>Tripla. | 4 2<br>9 3 | Seſquitertia.<br>Seſqualtera. | 4 3<br>3 2 | Bipartiēs tertias.<br>Tripartiēs quartas. | 5 3<br>7 4 |
| Subſeſqualtera. | 12–18 | Subſeſquioctaua. | 8–9 | Subſeſquiuigeſima. | 20–21 |

## ℂ *Qualiter duobus numeris datis, tertius, aut medius proportionalis inueniatur,* Cap. 3.

PRAESTAT CONSEQVENter, ad proportionales deſcēdere regulas, quibus vniuerſę ferè tum mathematicę, tum ciuiles pertractātur negotiationes. A minimo itaq; terminorū continuè proportionaliū exordiēdo numero: ſi duobus numeris datis, tertiū oporteat in eadē ratione ſubiūgere proportionalē, ſic facito. Multiplicetur is numerus qui futurus eſt ſecundus in ſeipſum, & productus inde numerus diuidatur per primum: naſcetur enim ipſe tertius & proportionalis numerus. 1

Duobus numeris datis, inuenire tertium proportionalem.

Exēplum.

Proponātur ī exēplū hi numeri, 27 & 9: ſitq; operępretiū inuenire numerū tertiū, ad quē 9, eandem obſeruent rationē, quā 27 ad 9. Multiplicabis ergo 9 per ſeſe, fient 81: quę diuides

per 27,prodibunt 3. Tantus eſt ipſe tertius & proportionalis numerus:nã 27 ad 9 eandẽ habent rationem, quam 9 ad 3, vtpote triplam.

Quòd ſi multiplicentur 27 per ſeipſa, fient 729:quę diuiſa per 9,dant pro quoto numero 81. Erit itaque numerus 81,primus trium proportionalium numerorũ, eiſdẽ numeris datis anteponendus:nam 81 ad 27 eandẽ rationem obſeruant,quam idem numerus 27 ad 9.

Notãdum.

2 ¶ Cùm autem duobus oblatis numeris, medium proportionalem operępretium fuerit inuenire numerum:colliges illum hac arte. Multiplicabis ipſos datos numeros adinuicem: & producti numeri quadratam ſupputabis radicem: nam ea erit numerus medius, ad quem primus eandem habebit rationem,quam ipſe medius ad vltimũ. Dentur in exemplum hi duo numeri 27 / 3, inter quos oporteat medium conſtituere proportionalem. Duces igitur 27 in 3, fient 81: quorum radix quadrata eſt 9. Tantus eſt ipſe medius,& proportionalis numerus:habent enim 27 ad 9 eandem rationem,quam ipſa 9 ad 3.

Duobus oblatis numeris,medium proportionalẽ ſupputare.

Exẽplum.

3 ¶Pẽdet autẽ eiuſcemodi operãdi ratio,ex prima parte vigeſimæ propoſitionis ſeptimi libri elementorũ:quæ ſic habet. Si tres numeri cõtinuè proportionales fuerint,qui ſub extremis inuicẽ multiplicatis gignitur numerꝰ, ęqualis eſt ei qui à medio in ſeipſũ ducto procreatur. Hinc fit,vt is qui ex medio procreatur numero ſi per primũ diuidatur,naſcatur tertius:aut

Prędictorũ ratio mathematica.

si idē numerus diuidatur per tertiū, generetur ipse primus. Haud dissimiliter, eius numeri qui sub extremis inuicē multiplicatis resultat quadrata radix, ipsum medium proportionalē exprimit numerum. Cùm enim duo numeri inuicem multiplicantur, si productus inde numerus per alterum eorum diuidatur: procreatur de necessitate reliquus. Quod & in sequēti quatuor proportionalium numerorum regula, haud dissimiliter obseruatur.

Notādum.

*De aurea quatuor proportionalium numerorum regula, qua tribus datis, quartus innotescit, numerus: déque illius usu multiplici.*
*Caput* 4.

De potestate 4 numerorū  ꝑportionalium.

1 TANTA EST VIS, ADEÓQVE indissolubilis fraternitas ipsorum quatuor numerorū inuicem proportionalium, & tam variæ ex illis emergūt rationum proportiones: vt omnia ferè cum ciuilia, tum mathematica negotia eorundem numerorum proportionalium tractentur ac dissoluantur officio.

Finis regulæ 4. ꝑ por. numerorū.

Huius itaque regulæ scopus, est datis quatuor numeris inuicē proportionalibus, si quispiam illorum ignoretur, ipsum trium cognitorum adminiculo reddere notum.

Origo eiusdem regulæ.

2 ¶ Ostensum est itaque decimanona propositione septimi elementorum Euclidis, si quatuor numeri proportionales fuerint: qui ex primo & quarto fit numerus, æquus est ei qui

ex secũdo & tertio. Hinc fit, vt ignoto altero extremorum, multiplicãdi sint intermedij numeri adinuicem, & productus inde numerus, per notum extremum diuidendus: vel altero intermediorum ignoto, vnus extremorum ducatur in reliquum, & productus inde numerus per notum intermedium diuidatur: vt ipse medius, vel extremus, & ignotus procreetur numerus. Cùm enim quispiam numerus per alium multiplicatur: fit numerus, qui diuisus per alterum multiplicantium, producít de necessitate reliquum. Multiplicantur ergo extremi numeri, in suffragium intermediorum: quia tantum producunt numerum, quantum & ipsi intermedij: atque è diuerso.

Hypothesis notanda.

Debent nihilominus ipsi numeri, in vsum practicum eo modo reuocari, vt ignotus & optatus numerus quartum possideat ordinem: ac ipse primus, re & nomine conueniat cũ ipso tertio, secundus autem cum acquisito quarto. Id enim requirunt proponendæ, ac per ipsam proportionaliũ regulã dissoluẽdæ quæstiones.

Conditio regulæ animaduertẽda.

3 ℂ Dentur in huiusce regulæ generalem expressionem, hi numeri 15/10/12/8, sub ratione sesqualtera proportionati: sicut videlicet 15 ad 10, sic 12 ad 8. Et supponatur in primis ignorari numerus quartus, vtpote 8. Multiplicabis igitur 12 per 10, fient 120: quæ diuisa per 15, reddunt 8, quantus est ipse quartus & proportionalis numerus. ℂAt si primus desideretur numerus, scilicet 15: illum rediges in quartum

Exemplum generale ipsius regulæ.

Quãdo nu. quart⁹ ignoratur.

Cùm primus ignoratur nu.

limitẽ. Cùm enim ſit vt 15 ad 10, ſic 12 ad 8: erit à conuerſa ratione, per corollariũ quartæ propoſitionis quinti elemẽtorũ Euclidis, vt 8 ad 12, ſic 10 ad 15. Ducãtur ergo 10 in 12, fiẽt rurſum 120: quæ diuiſa per 8, reddunt ipſa 15.

Quãdo ſecundus nu. ignoratur.

¶Supponatur conſequenter ignorari ſecũdus numerus, vtpote 10. Antepones igitur, duos vltimos numeros ipſi primo, ſecundámve rationẽ ipſi primæ: in hunc modũ, 12/8/15. Cùm enim ſit vt, 15 ad 10, ſic 12 ad 8: erit igitur vt 12 ad 8, ſic 15 ad 10. Multiplicabis ergo 15 per 8, conſurgent iterum 120: quæ diuides per 12, prodibunt 10.

Dum tertius ignoratur numerus.

¶Quòd ſi tertius forſitan ignotus fuerit numerus, vtpote 12: conuertes rurſum antecedentes numeros in conſequentes, & è diuerſo. Erit igitur vt 10 ad 15, ſic 8 ad 12. Multiplicẽtur itaq; 8 per 15, conſurget præfatus numerus 120: qui ſi diuidatur per 10, reſtituet pro quoto numero 12. Haud aliter intelligẽdũ ac faciẽdũ velim intelligas, de quibuſcũq; ſimilibus, ac ſimiliter propoſitis numeris.

Documenta ſpecialia in praxi regulæ ſeruanda.

¶Vbi autẽ abſoluta diuiſione ipſius producti per primũ & diuiſorem numerũ, aliquis remãſerit numerus ipſo diuiſore minor: is in ſubtiliorem reſoluendus eſt numerum, pro ratione ac qualitate ſiue ſpecie vnius ſingularis eiuſdem primi aut tertij numeri, atque productus inde numerus per ipſum primũ iterũ diuidendus: ídq; toties cõtinuandũ, quatenus ex ipſa diuiſione nihil tandẽ relinquatur. ¶Præterea, ſi primus triũ numerorũ ſolis integris, tertius

verò fractis cõstiterit numeris, aut è diuerso: debes prius, quàm per ipsam opereris regulã, alterũ prædictorũ numerorũ in alterius reuocare denominationẽ. Oportet enim primũ numerũ, cũ ipso tertio re ac nomine seu qualitate conuenire. Quẽadmodũ ex succedẽtibus exẽplis particularibus videbis sæpius obseruatũ.

Exceptio notanda.

¶ Excipimus tamen fractiones astronomicas, sexagenaria ratione distributas: quę per tabulam proportionalem, sub varijs speciebus (vti proximo libro docuimus) absque resolutione tractari vel facilè possunt.

Vt probanda regulæ veritas.

¶ Cũ autẽ periculũ facere libuerit, an optatũ per ipsã regulã cõsecurus fueris numerũ: id ex prçallegata decimanona septimi elemẽtorum Euclidis, absoluere vel facilè licebit. Si multiplicaueris enim primũ numerũ in ipsum quartum, idẽ procreabitur numerus, qui ex ductu secũdi in tertiũ generatur, si debitè supputaueris: Si autẽ præfati numeri fuerint inæquales, peccatũ est, & calculus propterea reiterãdus.

*¶ Exẽpla, seu quæstiones particulares, usum regulæ clarificantes.*

1 ¶ VT AVTEM IPSIVS REGVLAE INexplicabilis commoditas, & semper admirãda clarescat amplitudo, & in quarumcunq; rerum propositarũ, sub rationem atq; proportionem cadentium, adcommodetur vsum: ciuiles aliquot, atque mathematicas iuuat superaddere quęstiones, ac ipsas in aliarum exemplum per eandem proportionalium dissoluere regulam.

De agnoscẽdo precio rei emẽdę, quę sub mensuram cadit.

¶In primis igitur, si quis emerit (verbi gratia) quatuor vlnas pãni pretio 15 librarũ, & optauerit scire, quanti ementur vlnæ 25 eiusdem panni: proponũtur tunc numeri quatuor inuicẽ proportionales, quorũ quartus & ignotus est numerus pretij eiusdẽ rei emẽdæ, ad quem necessum est 25 eandẽ habere rationem, quam ipsa 4 ad 15. Multiplicentur ergo 25 per 15, fient 375: quæ diuidenda sunt per 4, prodibũt franci 93, relictis tribus francis, qui non possunt diuidi per 4. resoluãtur itaque in solidos, siue duodenos turonenses, per sextum caput libri primi, résultabunt duodeni 36: quos rursum diuidere oportet per ipsa 4, producentur 9. Optatus itaque numerus quartus, continebit francos 93, & duodenos 9: Tanti igitur ementur, ipsæ 25 vlnæ eiusdẽ panni propositi.

De eodem pretio dignoscendo in rebus põdere distributis.

¶Secundò, si libræ 100 olei oliuarum valeant francos 7 & $\frac{1}{4}$, & iuuet agnoscere quãti ementur eiusdem olei libræ 2350: resolues in primis francos 7 & $\frac{1}{4}$, ad duodenos turonẽses, fient duodeni 125. Deinde iuxta regulæ tenorem multiplicabis 2350, per 125, cõsurgẽt 293750: quæ diuides per 100, prouenient duodenĩ 2937, relictis 50, qui non possunt diuidi per 100. hos itaque relictos 50 duodenos, resolues in turonos, iuxta traditionem ipsius sexti capitis antecedẽtis libri primi, fient turoni 600: quos diuides per 100, nascentur 6. Erit igitur numerus pretij desideratus, duodenorũ 2937, & turonorum 6: quæ reducuntur ad libras

turonenses. 146, & duodenos 17, vnà cũ eisdẽ 6 turonis. Tanti ergo ementur, ipsæ 2350 libræ olei supradicti.

3 ¶ Tertiò, si pãnus sericus emptus fuerit frãcis 180, & volueris scire quãti oporteat ipsum vendere, vt lucreris francos 16 pro quolibet centenario francorũ numero: subsumendi sunt tunc quatuor proportionales numeri, iuxta ipsius quæstionis propositionem. Tu enim vis 100, verti in 116: dic igitur, si 100 dent 116, quantum dabunt 180? Multiplicabis itaq; 180, per 116, fient 20880: quæ diuisa per 100, dant pro quoto numero francos 208, & duodenos 16. Tantundem igitur vendas oportet ipsum pannum sericum, si ad propositam lucri volueris deuenire rationem.

*De lucro rei emptæ, sub data ratione constituendo.*

¶ Quòd si eandem summam 208 frãcorum & 16 duodenorum, diuiseris per numerum vlnarum eiusdem panni: nascetur pretium cuiuslibet vlnæ, ad præfatam lucri rationem seorsum distribuendæ. Vt supposito quòd idem pãnus contineat vlnas 40: diuides 208 francos & 16 duodenos per 40, prouenient franci 5, duodeni 4, vnà cum 8 turonis pro qualibet vlna. Haud aliter facito de quibuscunque similibus, & similiter propositis quæstionibus.

*Notãdum.*

4 ¶ Quartò, si è diuerso quæstio forsitan proponatur, vtpote, est pannus sericus venundatus pretio 208 francorum, & duodenorum 16, & lucratum est ad rationem 16 pro 100, & quæratur quanti fuerit emptus idem pannus: cùm

*Ex venditione & lucro dato, pretiũ emptionis elicere.*

116 prouenerint ex 100, propones in hunc modum numeros ipſos proportionales. Si 116 franci, proueniant ex 100: ex quo francorum numero, prodierunt franci 208, vnà cum 16 duodenis? Deinde multiplicabis 208 francos & 16 duodenos per 100, conſurgent franci 20880: quos diuides per 116, naſcentur franci 180. Tanti fuerat emptus idē pannus ſericus.

Hinc ſi præfatos 180 francos per numerum vlnarum eiuſdē panni diuiſeris: ſingulare pretium cuiuſlibet vlnæ ſeorſum obtinebis.

Ex pretio emptionis & venditionis, lucri rationem pro cētena colligere.

¶ Quintò, poteſt & ipſa quæſtio in hunc proponi modū. Eſt pannus (verbi gratia) ſericus, emptus pretio 180 frācorum: ſi is venundetur francis 208, vnà cum 16 duodenis, ad quam rationem pro cētena lucrū ipſum perducetur. Proponantur ſic tres primi numeri proportionales. Si 180 franci ſummę principalis, dēt frācos 208 vnà cum 16 duodenis principalis & lucri, quantū principalis & lucri dabūt 100. Duc igitur frācos 208 cū 16 duodenis in 100, producētur frāci 20880: quos diuide per 180, fiēt pro quoto numero 116: à quibus tolle 100, relinquentur 16. Ipſum ergo lucrum, erit ad rationem 16, pro centenario frācorum numero. 5

Vt proportionāda panis pondera, pro ratione pretij frumētarij.

¶ Sextò, cùm medimnus tritici, vænit (exempli gratia) duodenis 34, & confectus ex illo panis 6 denariorum turoneñ. obſeruat pondus 12 vnciarum: ſi idem medimnus tritici, venerit ad pretium 28 duodenorum, quæritur quot vnciarū formādus erit idē panis 6 denariorū? 6

In hac & similibus quæstionibus, locandus est numerus secundi valoris siue pretij in primo ordine, datus verò ponderis numerus in secũdo, primi denique valoris siue pretij numerus in tertio: quæstionem ipsam, in hunc qui sequitur modum proponendo. quot vnciæ prodibunt ex 28, si 12 vnciæ proueniant ex 34. hoc autem ideò fit, quoniam minuto pretio frumenti augmentatur pondus ipsius panis: & è conuerso. Duc itaque 34 in 12, fient 408: quæ diuide per 28, prodibunt 14 & $\frac{4}{7}$. Totidem vnciarum formandus est panis, vbi medimnus tritici descenderit ad pretium 28 duodenorũ. Haud dissimilem operandi rationem obseruabis, in minuendo põdere ipsius panis, vbi pretium eiusdem mensuræ frumentariæ fuerit augmentatum.

Data parte quota, & residuo, quæsitum inuenire numerum.

7 ¶ Septimò, descendendum est ad eas quæstiones, quæ per liberam numerorũ soluuntur positionem, hoc est, per subsumptionem duorum numerorum proportionalium, cum proposito numero tertio. Si quis igitur optauerit scire, à quo numero deducta tertia parte relinquuntur 50: is in hunc modum dignoscetur. Supponatur aliquis numerus habẽs tertiam partem, vtpote 15, cuius tertia pars est 5, & residuum (eadem tertia parte dempta) est 10. Dic igitur, si 10 relinquantur ex 15, ex quo numero relinquentur 50? Multiplicentur itaque 50 per 15, fient 750: quæ diuisa per 10, dãt pro quoto numero 75. Tantus est numerus, à quo dẽpta

tertia parte(quæ eſt 25) relinquuntur 50.

Ex quotarũ ſumma, numerum cuius ſũt quotæ ptęs colligere.

¶Octauò, eſto numerus, cuius $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ cũ $\frac{1}{4}$ ſimul iuncta, conficiunt 60: quæritur quãtus eſt ipſe numerus? Supponatur aliquis numerus habens $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$, qualis eſt numerus 12, cuius dimidium eſt 6, tertium verò 4, & quartum 3, quæ ſimul iuncta conficiunt 13: & in hũc modum quæſtio proponatur. Si 13 dent 12, quem numerum dabunt 60? Multiplicentur ergo 60 per 12, fient 720: quæ diuide per 13, producentur 55, vnà cum $\frac{5}{13}$. Tantus eſt numerus optatus. Nam dimidium ipſorum $55\frac{5}{13}$, eſt $27\frac{9}{13}$, tertium verò $18\frac{6}{13}$, & quartũ $13\frac{11}{13}$: quæ ſimul iuncta, conficiunt 60. 8

Pro ratione expoſitarũ pecuniarũ lucri partẽ in ſocietatibus proportionare

¶Nonò, oſtendendum eſt, qualiter ipſa regula ſocietatum quæſtiones non minus facilè diſſoluat. Supponantur itaque tres homines inuicem conueniſſe, quorum primus expoſuerit francos 350, ſecundus 400, tertius verò 450: Et facta rerum emptarum venditione, ſuperlucrati ſint 1000 francos. Quęritur quanta debet eſſe pars lucri competens vnicuique, pro ratione pecuniæ expoſitæ? In hac & ſimilibus quæſtionibus, adgregatum ex ſummis particularibus ſe habet ad totum lucrum, vt quęlibet ſumma particularis ad partem lucri proportionalem. Componantur igitur 350/400/450, fient 1200: quæ facies primum & diuiſorem numerum, ſecundum verò 1000, tertium autẽ numerum quamlibet ſummam particularem. Duc igitur 1000 in 350, poſtea in 400, tãdem 9

in 450:& productos inde numeros diuide per 1200. Offendes enim competere ipsi primo, francos 291, duodenos 13, & turonos 4: secundo autem, francos 333, duodenos 6, & turonos 8: tertio deniq;, francos 375 pręcisè: quæ simul iuncta, conficiunt præfatos 1000 frācos ipsius lucri propositi.

10 ¶ Decimò, exponatur summa 150 francorum, distribuenda tribus hominibus: ea tamen ratione, vt primus sit habiturus dimidiam partem, secundus tertiam, tertius verò quartam. Quæritur, quanta erit vnaquæq; prædictarum partium? Inueniatur rursum numerus habens dimidiam, & tertiam, & quartam partem: vtpote 12, cuius $\frac{1}{2}$ est 6, tertiū 4, & quartum 3: quæ simul iuncta, cōficiūt 13. Deinde ac si primus exposuerit 6, secundus 4, & tertius 3: sic proponito quæstionem. Si 13 dent 6: vel 4, aut 3, quantum dabunt 150? Et factis iuxta regulę tenorem multiplicationibus, atque diuisionibus: offendes partem ipsius primi esse francorum 69, & $\frac{3}{13}$, secundi 46 & $\frac{2}{13}$, tertij verò 34 vnà cum $\frac{8}{13}$: quæ simul iuncta, conficiunt præfatos 150 francos.

De summa denariorū diuersis di uersimodè distribuenda.

11 ¶ Vndecimò, sint rursum tres homines, sub hac couditione conuenientes, vt primus exposuerit francos 350 per menses 12, secundus francos 400, per mēses 10, tertius verò francos 450, per menses 8: & lucrati sint francos 1000. Quæritur quātum debetur vnicuiq;, pro ratione temporis & ipsius expositæ pecuniæ.

De proportionādo lucro, pro tēporis & pecuniæ diuersitate.

Multiplicetur quælibet sũma pecuniæ per suũ tempus: vtpote, 350 per 12, fiẽt 4200: deinde 400 per 10, consurgẽt 4000: tandẽ 450 per 8, producẽtur 3600. Hæc autẽ simul iuncta, cõficiũt 11800, ex ipsis pecuniarũ summis, & datis tẽporib⁹ resultãtia. Hũc itaq; numerũ 11800, fac primũ proportionalẽ, & 1000 frãcos lucri secundũ: in tertio autẽ ordine ponito singulos numeros ex summa qualibet frãcorum & suo tempore resultãtes, & quæstio ipsa in hũc proponatur modũ. Si 11800 dẽt 1000, quãtũ dabũt 4200, dein 4000, tandẽ 3600? Et factis vt ipsa postulat regula, & proximo exẽplo nono traditũ est, multiplicationib⁹, atq; diuisionib⁹: offendes deberi primò frãcos 355 & $\frac{55}{59}$, secũdò frãcos 338 & $\frac{58}{59}$, tertio verò frãcos 305, & $\frac{5}{59}$ vnius frãci, Hæc autẽ omnia simul iuncta, cõficiũt præfatos 1000 frãcos lucri propositi.

De mathematicis quæstionibus.

¶ Duodecimò (vt ad mathematica descendamus exempla.) Si planeta, proprio motu, pertranseat de circulo Zodiaco in tribus diebus 5 gradus (qualiũ totus circulus est 360) quot similes gradus perãbulabit in diebus 60? Multiplicabis igitur 60 per 5, fient 300: quæ diuides per 3, prodibunt 100. Tot igitur gradus idem planeta pertransibit intra dies 60. Haud alienũ habeto iudicium de quibuscunq; similibus, & similiter propositis quæstionib⁹ mathematicis. Omnes siquidẽ geometrici vel astronomici canones, huius regulæ absoluuntur beneficio. Semper enim occurrũt duo triangula 12

Nota de canonib⁹ geometricis & astronomicis.

ſimilia,hoc eſt,æquiangula, habẽtiáq; circum æquales angulos latera,& proinde 4 inuicem proportionalia:quorũ tria ſupponuntur nota, & illorũ adminiculo quartũ innoteſcit. Vt ex ea parte geometriȩ colligitur,quæ lõgitudinũ dimenſiones per radij viſualis obſeruationem cum inſtrumẽtis oſtendit. Idẽ ſimiliter & in ſinuum rectorũ,hoc eſt,rectarũ in circuli quadrante ſubtenſarũ videtur accidere demõſtrationibus.Nã ſæpiùs 4 ſeſe offerũt ſinus recti, inuicẽ proportionales:quorũ tres itidem noti ſupponũtur, ipſum quartũ iuxta regulæ tenorem manifeſtantes. Innumeræ itaq; ac penè incredibiles, cum ciuiles , tum mathematicæ quæſtiones,per eandem 4 proportionaliũ numerorum regulam indifferenter diſſoluentur: dummodò eorũdem 4 proportionaliũ numerorũ ordinẽ debitè noueris obſeruare,aut illos (ſi expediat) cõgruè ſupponere. Quẽadmodũ ex præcedentibus abundè clareſcit exemplis.

¶ *Qualiter eadẽ obſeruetur regula,in proportionandis tabularum aſtronomicarũ numeris, ſiue numerorum differentijs,per ipſam tabulam proportionalem.*

¶ IVVAT DEMVM VIRES HVIVS REgulæ,in proportionandis tabularum aſtronomicarum numeris ſiue differentijs, ſexagenaria ratione diſtributis,per ipſam tabulam proportionalem ſeorſum impreſſam demonſtrare: qua opitulante, numerus quartus proportionalis mira facilitate colligitur.

Duplex tabularũ ingressus.

Cõtingit itaq; eiusmodi tabulas, quẽadmodũ & ipsam tabulam proportionalem, lateraliter vel areatim ingredi:& neutro plerunque congressu,propositi offenduntur numeri.Quid autem sit lateraliter,vel areatim intrare tabulã, numero 5,quarti capitis,antecedẽtis libri tertij diffinitum est.

Regula generalis,pro ingressu laterali.

¶ Cùm igitur lateraliter intratur tabula, & 13 præcisi non occurrunt laterales numeri, quærenda est pars proportionalis differentiæ arealium numerorum,inter quos optatus cadit numerus, iuxta rationem minutorum partibus integris adiacentium,ad minuta 60: túncque primus numerus est 60,secũdus prædictorum minutorum numerus, tertius verò ipsa numerorum arealium differentia, quorum vnus respõdet partibus integris proximè minoribus, alter verò proxime maioribus ipsius numeri dati. Hæc igitur pars proportionalis,per solum ingressum lateralẽ in ipsam tabulam proportionalem, cum ipsa differentia & minutis datis, illico manifestatur: absoluendo scilicet multiplicationem secundi numeri in tertium, vel è diuerso, iuxta doctrinam numeri 6 eiusdem quarti capitis ipsius libri tertij, absq; diuisione producti per 60:vtpote,quæ per ipsius tabulæ constructionem suppletur.

Exemplũ.

¶Sit exempli gratia,arealis differentia secundorum 24:de qua sumenda sit pars proportionalis in ea ratione, qua se habent 60 minuta ad minuta 55. Sumptis itaq; 55 in latere a b, 14

& ipſis 24 in latere a c: offendes ad commu-
nem angulum 22/0,hoc eſt,ſecũda 22. Tu e-
nim ducis minuta in ſecunda, & fiunt tertia:
quæ diuiſa per minuta: reddunt ſecunda . Se
habent igitur 22 ſecũda,ad minuta 55:veluti
ſecunda 24,ad minuta 60.

¶Eſto rurſum arealis differentia ſecundorum 20, tertiorũ 30:de qua ſit operęprętiũ habere partem proportionalem in ea ratione , quam obſeruant minuta 35,ad minuta 60. Sumptis ergo 35 in latere a b,atque 20 & 30 in ipſo la tere a c:occurrent ad communem angulũ,ſub 20 quidem ſecunda 11,tertia 40: ſub ipſis au- tẽ 30,tertia 17, quarta 30. Quæ debito, & ſæpius ex- preſſo more coniuncta , ef- ficiunt ſecũda 11,tertia 57, & quarta 30. Tãta eſt pars proportionalis,ſiue quartus numerus optatus.

Aliud exemplum.

| Secunda. | Tertia. | Quarta. |
|---|---|---|
| 11 — | 40 | |
| | 17 — | 30 |
| 11 / | 57 / | 30 |

Cæteras porrò introitualium numerorum dif- ferẽtias,ex eodẽ capite quarto præcedẽtis li- bri tertij(in quo de eiuſcemodi numerorũ agi- tur multiplicatione) colligendas remittimus.

15 ¶Cvm porrò areatim intratur aliqua ta- bula,& pręciſi in area nõ ſeſe offerũt numeri: accipitur tunc pars proportionalis numeri 60 (qui eſt differẽtia duorũ lateraliũ numerorum immediatè ſuccedẽtium,& minuta vnius gra- dus,aut vnius minuti ſecunda repræſentat)in ea quidẽ ratione,qua ſe habet differẽtia ipſius oblati numeri & numeri proximè minoris , ad

Regula generalis pro ingreſſu areali.

m.j.

differentiam eiuſdem proximè minoris atque proximè maioris numeri arealis, inter quos propoſitus coincidit numerus. Primus itaque numerus, eſt ipſa maior differentia: ſecundus, differẽtia minor (quæ eſt pars ipſius maioris) tertius verò, ipſe numerus 60. Ea ergo pars proportionalis, ſiue numerus quartus, per ſolũ arealem ingreſſum in eandem tabulã proportionalẽ, cum duobus primis numeris obtinetur: diuidendo ſcilicet numerũ ſecundum per primum, abſque eiuſdem ſecundi multiplicatione per tertium, vtpote, quæ ſub ipſius tabulæ conſtructionem comprehenditur.

Exẽplum. ¶Eſto verbi gratia arealis differẽtia maior minutorum 45, minor autem minutorum 12: ſitque propoſitum accipere partem proportionalem de 60 minutis lateralibus, in ea quidem ratione, qua ſe habent ipſa 12 ad 45. Acceptis igitur 45 in latere a b, ipſius tabulæ proportionalis: perquirito 12 inter areales numeros, è dextra quidem regione ipſorum 45. Quibus tandẽ in hunc modum ſeſe offerẽtibus 12.0: occurrent tibi ad verticem columnæ 16, quæ minuta dicentur, eandem habentia rationem ad 60, quam 12 ad 45. 16

Aliud exẽplum. ¶Sit rurſum operępretium, accipere partem proportionalem de præfatis 60 minutis, in ea ratione, qua ſe habent 15 minuta & 24 ſecunda, ad minuta 28. Sũptis itaq;, iuxta doctrinã numeri 4, quinti capitis antecedentis libri tertij, 28 in latere a c, eiuſdẽ tabulæ proportionalis: ſub ipſis 28

rectiſſimè deſcendẽdo, offendes tãdem 15.12 præciſè. à quibus ſi læuorſum directè progrediendo, in latus perueneris a b: occurrent illic minuta 33, quæ eãdem rationem obſeruant ad 60, quam minuta 15 & 12 ſecunda, ad ipſa 28 minuta.

¶Quòd ſi plures in diuiſore concurrerint fractionum ſpecies, vel ipſæ diuidendæ fractiones in area tabulæ prçciſè non reperiãtur: obſeruabis ea documenta ad huiuſcemodi fractionum diuiſionem ſpectantia, quæ præfato numero 4, ipſius quarti capitis prçcedẽtis libri tertij, ſigillatim annotauimus.

Notãdum.

*¶Qualiter duobus numeris inæqualibus datis, duo intermedij reperiantur numeri, ſub eadem ratione cõtinuè proportionales,* *Cap. 5.*

HVIVSCE QVATVOR NVmerorum continuè proportionalium adinuentionem, in gratiam noſtræ circularis quadraturæ, primùm excogitauimus, & noſtro mathemathico triumpho cõſcripſimus: quam hoc in loco repetere, ac ſummatim perſtringere, non duximus importunum. vtpote, ſine qua figurarum tam planarum quàm etiam ſolidarum augmentationes atq; diminutiones, ſub quauis ratione data propoſitas, earundémque figurarũ perutiles trãſmutationes, facere eſt impoſſibile: quẽadmodũ ex noſtra Geometriæ praxi, deprehendere vel facilè poteris.

Propoſitæ regulę miranda vtilitas.

Regulæ summa. ¶ Oblatis igitur duobus quibuscũq; numeris 2 inæqualibus, inter quos operæpretiũ sit duos medios inuenire numeros, sub eadem ratione continuè proportionales: secũdum in primis, hac arte colligito numerũ. Duc vnũ datorum numerorũ in reliquum, & productum inde nu merorum duc rursum in eum prædictorum nu merorum quem vis efficere primum, consur gẽtis inde numeri cubicam extrahito radicẽ: nam ea erit optatus numerus secundus. Quòd si præfatum numerum ex eorundẽ oblatorum numerorum multiplicatione procreatum, in reliquum numerum, hoc est, vltimum multi plicaueris, & producti cubicam itidem acce peris radicem: ea erit tertius numerus propor tionalis. Erit igitur vt primus numerus ad se cundum: sic idem secundus ad ipsum tertium, atque idem tertius ad numerum quartum.

Notãdum. Verùm vbi ex supradictis multiplicationi bus procreati numeri non fuerint cubi, veras illorũ radices inuenire est impossibile: eas ta men, per secundam partem octaui capitis an tecedentis libri primi, adeò præcisas obtinere licebit, vt à veris & surdis radicibus (etiam in quemcunque reuocentur vsum) differre nullo modo videantur.

Exẽplum. ¶ Dentur in exẽplum hi duo numeri, 81, 3: in 3 ter quos expediat duos inuenire numeros, sub eadem ratione continuè proportionales. Mul tiplicabis igitur 81 per 3, fient 243: quæ rur sum duces in 81, consurgent 19683. quorum

radix cubica eſt 27:tantus eſt ſecundus nume
rus proportionalis. Quòd ſi multiplicaueris
eundem numerum 243 per 3,fient 729:quorū
radix cubica eſt 9.tantus eſt numerus tertius:
nā ipſi numeri 81/27/9/3,ſub ratione tripla cō
tinuè proportionantur. Poteris & obtēto ſe- Notādum.
cundo numero,inuenire tertium:vel ipſo ter-
tio ſupputato colligere ſecundum,per antece
dentis primi capitis traditionem. Si enim mul
tiplicaueris 27 per 3, fient 81: quorum radix
quadrata eſt 9. Aut ſi duxeris 81 in 9, produ-
cētur 729:quorū radix quadrata eſt 27. Haud
aliter facito,dē quibuſcunque ſimilibus.

4 ¶Sed demus exemplum,vbi producti numeri Aliud exēplum.
nō ſunt cubi:ſíntq; ipſi oblati numeri 60,24.
Multiplicabis ergo 60 per 24,fient 1440:quę
rurſum duces in 60, conſurgent 86400. quo-
rum radix cubica,eſt 44,& circiter $\frac{12}{60}$,quæ fa-
ciunt $\frac{1}{5}$. tantus eſt ſecūdus & proportionalis
numerus. Quòd ſi eundem numerū 1440 mul
tiplicaueris per 24,producentur 34580: quo-
rum radix cubica eſt 32,vnà ferè cum $\frac{34}{60}$,quæ
reducūtur ad $\frac{17}{30}$.tātus eſt ipſe numerꝰ tertius.

¶Ex his autem 4 numeris continuè propor- Notādum.
tionalibus, variæ ac non inutiles eliciuntur
proportionū diuerſitates:Quas tum ex ſupra-
dictis numero 6, antecedentis primi capitis
huius libri,& ex libro quinto elementorū Eu-
clidis(in quo de proportionibus vniuerſaliter
pertractatur) tū ex ipſo noſtro mathematico
triumpho colligēdas,data remittamus opera.

*De regula sex quantitatum inuicem proportionalium, eiusque differentijs, & usu multiplici, cap. 6.*

Ptolemę⁹.

DEMONSTRAVIT PTOLEmæus, capite duodecimo libri primi suæ magnæ cõstructionis (quã vocant Almagestum) & nos similiter ex nostræ circularis quadraturæ collegimus demonstratione: dabiles esse videlicet sex quantitates sic adinuicẽ proportionatas, vt ratio primæ ad secũdã cõponatur ex rationibus tertiæ inquã ad sequentẽ quartã, & ipsius quintæ ad sextam. Hinc orta est illa sex quantitatũ proportionaliũ regula, qua nulla præstantior inuenitur ad cęlestium motuũ, aliarũmq; rerũ secretarũ inuestigationẽ: & proinde quæ ad ipsius magnæ constructionis intelligẽtiam, adeò videatur esse necessaria. In cuius regulæ fundamẽtũ, subscriptos, & q̃ minimos potuim⁹ in datis rationibus, tibi selegimus numeros: vtpote 1/2/3/4/6/9, iuxta ipsius regulę tenorem inuicẽ proportionatos. Ratio enim 1 ad 2, quę est subdupla: cõstat ex ratione 3 ad 4, quæ est subsesquitertia, & subsesqualtera ratione ipsorũ 6 ad 9. Vti subiecta cõpositionis earũdem rationũ indicat formula, iuxta precedentis secundi capitis traditionem conscripta: fit enim ratio 18 ad 36, quę eadẽ est rationi ipsius 1 ad 2.

De origine ac vtilitate regulæ 6 quantitatũ.

Exemplares numeri iuxta regulam inuicẽ proportionati.

| | |
|---|---|
| Subsesquitertia. | 3 — 4 |
| Subsesqualtera. | 6 — 9 |
| Subdupla, vt 1 ad 2. | 18 — 36. |

17 rationũ cõpositiones, ex prima suborta.

Ex hac autẽ primaria & veluti radicali eiusdẽ rationis cõpositione,

17 ſuboriuntur rationum compoſitiones, ſiue compoſitionum ordines, inter eoſdem ſex numeros 1,2,3,4,6,9, pendenter accidentes: qui vnà cum ipſo primo & radicali, ſunt numero 18. Quos omnes ſub hac ſuccedenti perſtrinximus tabulæ contextura.

TABVLA 18 MODORVM, quibus inter præfatos 6 numeros, ratio duorum primorum, conſtat ex rationibus reliquorum quatuor.

| Modi compoſitionũ poſſibiles. | Ordo numerorum. Primus. | Secũdus. | Tertius | Quartus | Quintus. | Sextus. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Primus modus | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 9 |
| Secundus. | 1 | 2 | 3 | 9 | 6 | 4 |
| Tertius | 1 | 3 | 2 | 4 | 6 | 9 |
| Quartus. | 1 | 3 | 2 | 9 | 6 | 4 |
| Quintus. | 1 | 6 | 2 | 9 | 3 | 4 |
| Sextus. | 1 | 6 | 2 | 4 | 3 | 9 |
| Septimus. | 2 | 4 | 1 | 3 | 9 | 6 |
| Octauus. | 2 | 4 | 1 | 6 | 9 | 3 |
| Nonus. | 2 | 9 | 1 | 3 | 4 | 6 |
| Decimus. | 2 | 9 | 1 | 6 | 4 | 3 |
| Vndecimus. | 3 | 4 | 1 | 2 | 9 | 6 |
| Duodecimus. | 3 | 4 | 1 | 6 | 9 | 2 |
| Decimustertius. | 3 | 9 | 1 | 2 | 4 | 6 |
| Decimusquart⁹. | 3 | 9 | 1 | 6 | 4 | 2 |
| Decimusquint⁹. | 4 | 6 | 2 | 1 | 3 | 9 |
| Decimusſextus. | 4 | 6 | 2 | 9 | 3 | 1 |
| Decimusſeptim⁹ | 6 | 9 | 1 | 2 | 4 | 3 |
| Decimusoctau⁹. | 6 | 9 | 1 | 3 | 4 | 2 |

Summaria tabulæ dilucidatio.

In prima itaq; & læua ipſius tabulæ colũna, primi locãtur numeri, ad numeros ſecundæ columnæ ſigillatim comparandi: quorum ratio, cõſtat ex ratione numerorũ tertiæ columnæ ad numeros quartæ, & ratione numerorũ ſuccedentis quintæ colũnæ ad numeros ipſius ſextæ. Hinc facilè liquet, qui numeri inter eoſdẽ 6 proportionales, ipſi⁹ primi aut ſecundi, quíve tertij & quarti, ſeu quinti demũ & ſexti fungantur officio.

Cæteræ autem rationes inter eosdē accidentes numeros (quæ sunt tātūmodò sex, vtpote primi ad quartū vel sextū, secundi ad tertium vel quintum, atq; tertij ad eundem quintum, & ipsius tandē quarti ad sextū) ex cæterorum numerorū rationibus nullo modo cōponūtur.

Præfatæ 18 rationum cōpositiones, suo ordine exemplariter dilucidatæ.

¶ Horum autem 18 modorum formulas, siue rationum compositiones, inter eosdem 6 numeros, iuxta tenorem ipsius antecedentis secundi capitis accidentes, in maiorem omniū expressionē, superaddere: illósque suo ordine distribuere, non duximus incommodum. 3

¶ Primus & radicalis modus: in quo ratio primi numeri ad secūdum, componitur ex ratione tertij ad quartum, & ratione quinti ad sextum.

| | |
|---|---|
| Subsesquitertia. | 3—4 |
| Subsesquialtera. | 6—9 |
| Subdupla, vt 1 ad 2. | 18—36 |

¶ Secundus compositionis modus: in quo ratio eiusdē primi numeri ad secundū, constat ex ratione tertij ad sextū, atq; ratione quinti ad quartum.

| | |
|---|---|
| Subtripla. | 3—9 |
| Sesquialtera. | 6—4 |
| Subdupla, vt 1 ad 2. | 18—36 |

¶ Tertius modus: in quo ratio primi numeri ad tertium, constat ex ratione secundi ad quartum, & ratione quinti ad ipsum sextū.

| | |
|---|---|
| Subdupla. | 2—4 |
| Subsesquialtera. | 6—9 |
| Subtripla, vt 1 ad 3 | 12—36 |

¶ Quartus modus: in quo ratio eiusdē primi numeri ad tertiū, cōficitur ex ratione secūdi ad sextū, & ratione ipsius quīti ad quartū.

| | |
|---|---|
| Subquadrupla sesquialtera. | 2—9 |
| Sesqualtera. | 6—4 |
| Subtripla, vt 1 ad 3. | 12—36 |

¶ Quintus modus: in quo ratio ipſius primi numeri ad quintũ, cõponitur ex ratione ſecundi ad ſextum, atq; ipſiꝰ tertij ad quartũ.

| | |
|---|---|
| Subquadrupla ſeſquialtera. | 2 — 9 |
| Subſeſquitertia. | 3 — 4 |
| Subſextupla, vt 1 ad 6. | 6 — 36 |

¶ Sextꝰ modus: in quo ratio eiuſdẽ primi numeri ad ipſum quintũ, conſtat ex rationibus ſecũdi ad quartum, & tertij ad ipſum ſextũ.

| | |
|---|---|
| Subdupla. | 2 — 4 |
| Subtripla. | 3 — 9 |
| Subſextupla, vt 1 ad 6 | 6 — 36 |

¶ Septimus modus: in quo ratio ſecundi numeri ad quartũ, reſultat ex binis rationibꝰ, ipſius quidẽ primi ad tertium, & ſexti ad quintum numerum.

| | |
|---|---|
| Subtripla. | 1 — 3 |
| Seſquialtera. | 9 — 6 |
| Subdupla. vt 2 ad 4. | 9 — 18 |

¶ Octauus modus: in quo ratio eiuſdem ſecũdi numeri ad ipſum quartum, cõficitur ex ratione primi ad quintum, atque ſexti ad ipſum tertium.

| | |
|---|---|
| Subſextupla. | 1 — 6 |
| Tripla. | 9 — 3 |
| Subdupla, vt 2 ad 4. | 9 — 18 |

¶ Nonus modus: in quo ratio præfati numeri ſecũdi ad ſextũ, conſtat ex rationibus primi ad tertium, & quarti ad ipſum numerum quintum.

| | |
|---|---|
| Subtripla. | 1 — 3 |
| Subſeſqualtera. | 4 — 6 |
| Subquadrupla ſeſqualtera, vt 2 ad 9. | 4 — 18 |

¶ Decimus modus: in quo ratio eiuſdem ſecũdi numeri ad ipſum ſextũ, conficitur ex ratione primi ad quintũ, atq; ratione quarti numeri ad ipſum tertiũ.

| | |
|---|---|
| Subſextupla. | 1 — 6 |
| Seſquitertia. | 4 — 3 |
| Subquadrupla ſeſqualtera, vt 2 ad 9. | 4 — 18 |

¶Vndecimus modus: in quo ratio tertij numeri ad quartum, constat ex rationibus primi quidẽ ad secundũ, & sexti ad ipsum numerum quintum.

| | |
|---|---|
| Subdupla. | 1—2 |
| Sesquialtera. | 9—6 |
| Subsesqtertia, vt 3 ad 4. | 9—12 |

¶Duodecimus mod⁹: in quo ratio eiusdem tertij numeri ad ipsum quartũ, resultat ex rationib⁹ primi ad quintum, & ipsius sexti ad secundum numerum.

| | |
|---|---|
| Subsextupla. | 1—6 |
| Quadrupla sesquialtera. | 9—2 |
| Subsesqtertia, vt 3 ad 4. | 9—12 |

¶Decimustertius: in quo ratio præfati numeri tertij ad sextum, componitur ex ratione primi ad secundũ, & ipsius quarti ad numerum quintum.

| | |
|---|---|
| Subdupla. | 1—2 |
| Subsesquialtera. | 4—6 |
| Subtripla, vt 3 ad 9 | 4—12 |

¶Decimusquartus: in quo eadẽ ratio numeri tertij ad ipsum sextũ, cõstat ex rationib⁹ primi inquã numeri ad quintum, & quarti ad secundum numerum.

| | |
|---|---|
| Subsextupla. | 1—6 |
| Dupla. | 4—2 |
| Subtripla, vt 3 ad 9. | 4—12 |

¶Decimusquintus: in quo ratio quarti numeri ad quintum, cõficitur ex rationibus secundi numeri ad primũ, & tertij ad ipsum numerum sextum.

| | |
|---|---|
| Dupla. | 2—1 |
| Subtripla. | 3—9 |
| Subsesquialtera, vt 4 ad 6. | 6—9 |

¶Decimussextus: in quo eadẽ ratio numeri quarti ad ipsũ quintum, constat ex ratione secundi ad sextum, & ipsius tertij ad primum numerum.

| | |
|---|---|
| Subquadruplasesqualt. | 2—9 |
| Tripla. | 3—1 |
| Subsesquialtera, vt 4 ad 6. | 6—9 |

¶ Decimusseptimus: vbi ratio quinti numeri ad sextum, componitur ex ratione primi ad secundum, & quarti numeri ad ipsũ tertium.

| Subdupla. | 1—2 |
| --- | --- |
| Sesquitertia. | 4—3 |
| Subsesqualtera. vt 6 ad 9. | 4—6 |

¶ Decimusoctauus & vltimus, in quo prefata ratio quinti ad numerũ sextũ, cõstat ex rationibus primi inq̃ ad tertiũ, & quarti ad secundum numerum.

| Subtripla. | 1—3 |
| --- | --- |
| Dupla. | 4—2 |
| Subsesqualtera, vt 6 ad 9. | 4—6 |

¶ Hinc facilè patet, qualiter hic senarius ordo numerorũ, in quaternariũ vtiliter redigatur. Ex ipsis enim quatuor vltimis numeris, duo cõficiũtur numeri, cũ duobus primis sub eadẽ ratione proportionales: vnde singuli sex quantitatũ canones, in quatuor proportionaliũ numerorũ regulã, vel facilè tandẽ conuertũtur.

Corollariũ notandum.

¶ RELIQVVM est, ostendere qualiter oblatis sex numeris, sic inuicem colligatis, vt ratio duorum quorumvis constet ex rationibus cæterorum quatuor: si quispiam illorum ignoretur, is reliquorum adminiculo dignoscatur.

Regula, siue praxis earundem 6 quantitatum.

In primis igitur, vbi sextus numerus ignorabitur, multiplicabis secundum in tertium, & productum diuides per primum: quotum rursum ex diuisione numerorũ duces in quintũ, productúmque diuides per quartum: habebis enim præfatum numerum sextum. Resumantur exempli gratia, præassumpti sex numeri 1/2/3/4/6/9, iuxta primũ & radicalẽ modum distributi: sitq; numerus 9 ignotus. Duc igitur

Vbi sextus ignoratur numerus.

2 in 3, fient 6: quæ diuide per 1, redibũt 6. hęc rursum ducito in 6 (quintum videlicet numerum) consurgent 36: quæ diuisa per 4, dabunt pro quoto & optato numero 9.

Dum quintus ignotus est numerus.

¶Secundò, vbi quintus ignorabitur numerus, duc primum in quartum, & productũ diuide per tertium: quod ex hac autẽ diuisione procreatur duc rursum in numerum sextum, & productum diuide per secundum: & eundem quintum obtinebis numerum. Exempli causa, ignoretur numerus 6. Duc itaq; 1 in 4, redibunt 4: que diuide per 3, prouenient 1 & $\frac{1}{3}$. Hæc rursum multiplica per 9, consurgent 12: quæ diuisa per 2, generant 6, quantus est ipse numerus quintus.

Dum ipse quartus optatur numerus.

¶Tertiò, vbi quartus numerus incognitus fuerit: ducendus est secundus in tertium, & productum diuidendum per primum. quotus inde numerus, per quintum multiplicandus est: & is qui resultabit, diuidendus per ipsum numerũ sextũ. Vtpote, si numerus 4 ignoretur, multiplicabis 2 in 3, fient 6: quæ diuides per 1, redibũt 6. Hæc per 6 numeri quinti rursum multiplicabis, consurgent 36: quæ si diuidãtur per 9, dabunt pro quoto & optato numero 4.

Vbi tertius numerus ignoratur.

¶Quartò, si tertius numerus desideretur, hũc sic curabis inuentum. Duc primum numerum in quartum, productũmq; diuide per secundũ: prouenientem autẽ ex ipsa diuisione, duc rursum in sextum, & procreatum inde numerum diuide per quintũ. Ignoretur enim numerus

3. Duces igitur 1 in 4, redibunt 4: quæ diuides per 2, proueniẽt 2. hęc iterũ multiplicabis per 9, cõsurgent 18: quæ diuides tandẽ per 6, prodibunt 3, quãtus est ipse numerus tertius.

¶Quintò, vbi secundũ operępretiũ fuerit habere numerũ, sic facito. Duc primũ in quartũ, & productum inde numerum diuide per tertium: quotũ rursum numerũ ducito in sextum, productúmq; diuidito per ipsum quintũ. Nã inter præassumptos numeros, secundus est 2. Duc igitur 1 in 4, fient solummodò 4: quę diuide per 3, nascentur 1 & $\frac{1}{3}$. Hæc rursum ducito in 9, resultabũt 12: quę diuisa per 6, generabũt ipsum optatũ numerũ secũdũ, vtpote 2.

Vbi secundus ignotus est numerus.

¶Sextò & vltimo, si primus ignotus fuerit numerus, is in hunc modũ supputetur. Ducatur secundus in tertium, & productus inde numerus per quartum diuidatur: quotus autem ex ipsa diuisione per quintum rursum multiplicetur, productúsq; numerus diuidatur per ipsum sextum. relinquetur enim primus. In primum numerum subrogauimus vnitatem: quæ supponatur ignota, & in hũc modũ colligatur. Multiplicentur 2 in 3, fient 6: quę diuisa per 4, dãt 1 & $\frac{1}{2}$. Hæc rursum multiplicata per 6, producunt 9: quæ per 9, hoc est, sextum diuisa numerum, restituunt 1.

Quãdo primus numerus desideratur.

¶Haud dissimiliter, datũ quẽuis horũ sex numerorũ, iuxta quanuis reliquarum 18 rationũ compositionem distributorum, curabis inuentum: necnon & oblatorum quotumcunq; sex

Corollariũ.

numerorum ignotum, similibus rationũ commixturis siue proportionibus inuicem colligatorum.

Conclusio. HAEC sunt, candide ac studiose lector, quæ de absoluta numerorum tam integrorum, quàm vulgari & astronomica ratione partium distributorũ praxi, in aliarum disciplinarũ introductionem, & communẽ studiosorum omnium vtilitatem, nobis conscribenda & ædẽda videbantur.

*Quarti & vltimi libri Arithmeticæ practicæ, ex Orontij Finæi Delphinatis Regij Mathematicarum Lutetiæ professoris traditione,*

FINIS.

Virescit vulnere virtus.

## INDEX SVMMARIVS CAPITVM, singulis huiusce Arithmeticæ practicæ libris contentorum.

PRIMI LIBRI CAPITA.



LIBRI SECVNDI CAPITA.



LIBRI TERTII CAPITA.

## QVARTI LIBRI CAPITA.



FINIS.

*Erratula, in aliquibus tantùm exemplaribus, artis impressoriæ labilitate commissa.*

Fo.26, pagina 2, linea prima: legẽdum, & subducto primo numero.

Fo.32, pag.2, li.5, & 6: legendum, fractionum $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ &c.

Fo.69, pa.2, li.12: legendum. Cap. 7.

Cætera peruia sunt.